MATH EN JEAN 2013-2014

Elèves de seconde, première et terminale scientifiques :

Lycée Michel Montaigne :
CHERITEL Côme T°S
POLLOZEC Hélène 1°S
SOK Sophie 1°S

ETEINDRE

Lycée Sud Médoc :
CROSIO Gauthier 2nd
PELAGE Boubacar 2nd

LES

Accompagnateurs :

Lycée Michel Montaigne :
M GRIHON
Mme GRIMAUD

Lycée Sud Médoc :
Mme GRIHON
Mr Jean-Pierre HAURE

Chercheuse :

Mme BACHOC

LUMIÈRES

Eteindre les lumières

Présentation du sujet :

Dans la maison toute neuve de Lucie, chaque lumière possède son propre interrupteur. Mais l'électricien s'est un peu embrouillé dans ses connexions électriques : il a en effet connecté un certain nombre d'interrupteurs entre eux, de sorte qu'en actionner un, allume ou éteint sa propre lumière, mais également celles des interrupteurs qui lui sont directement reliés. Heureusement, il a laissé le plan des connexions à Lucie. Et il est parti en laissant toutes les lumières allumées !

Au vu de ce plan, pouvez-vous aider Lucie à les éteindre toutes ? Et d'ailleurs est-ce possible ? Quels plans de connexions permettent de tout éteindre et lesquels ne le permettent pas ?

在 lucie 全新的房子里，每盏灯都有它独立的开关。但是电工稍微复杂化了踏它的电路连接：他让某些电路中的开关连在一起。幸运的是，他把电路图表给了 Lucie，他走的时候所有的灯都是开着的。

在看了这张电路示意图之后，你们可不可以帮助 Lucie 关掉所有的灯泡呢？是否有这种可能性呢？哪种电路连接方法可以全部关掉，哪种又不行呢？ (1)

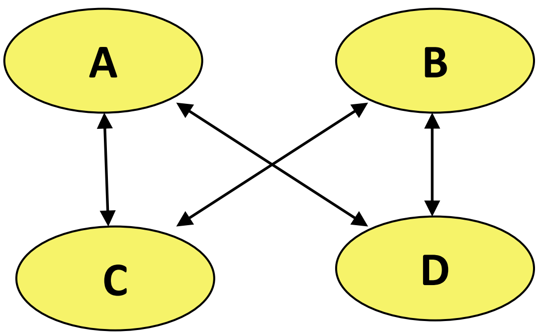
Résumé : Dans une première partie nous étudions quelques cas particuliers et nous dégageons une méthode algorithmique pour résoudre tous les cas. Dans une deuxième partie nous démontrons que le problème a toujours une solution. Dans une troisième partie, nous montrons que l'hypothèse de symétrie des liaisons entre les interrupteurs est essentielle.

PREMIERE PARTIE

I - Définition

Avec un petit nombre d'ampoules on trouve plus ou moins facilement la combinaison pour tout éteindre.

Exemple : Prenons l'exemple de quatre ampoules allumées, reliées de la façon suivante :

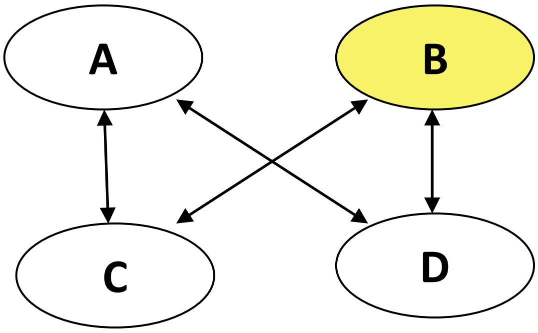


Par convention :

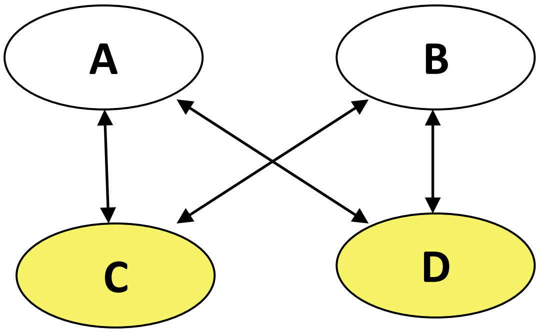
- On nomme chaque ampoule par une lettre.
- Les ampoules allumées sont jaunes et si non blanches.
- Les liaisons sont marquées par des doubles flèches.

En tâtonnant un peu on constate que si on appuie une seule fois sur chaque ampoule tout sera éteint :

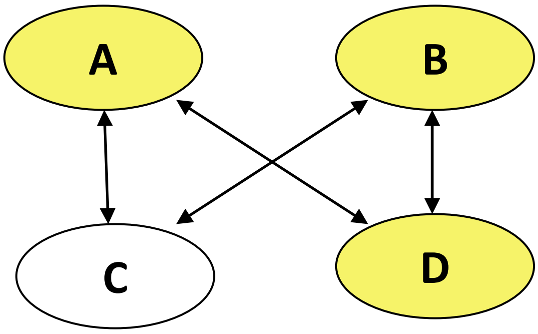
1 : Appuyer sur A :



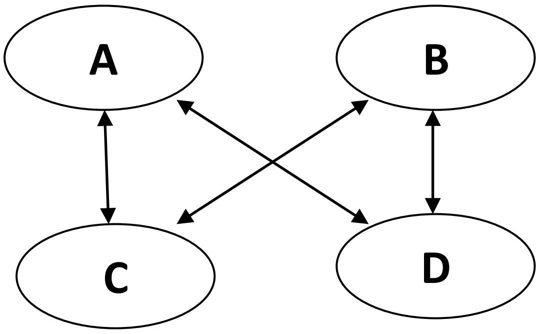
2 : Puis appuyer sur B



3 : Ensuite sur C



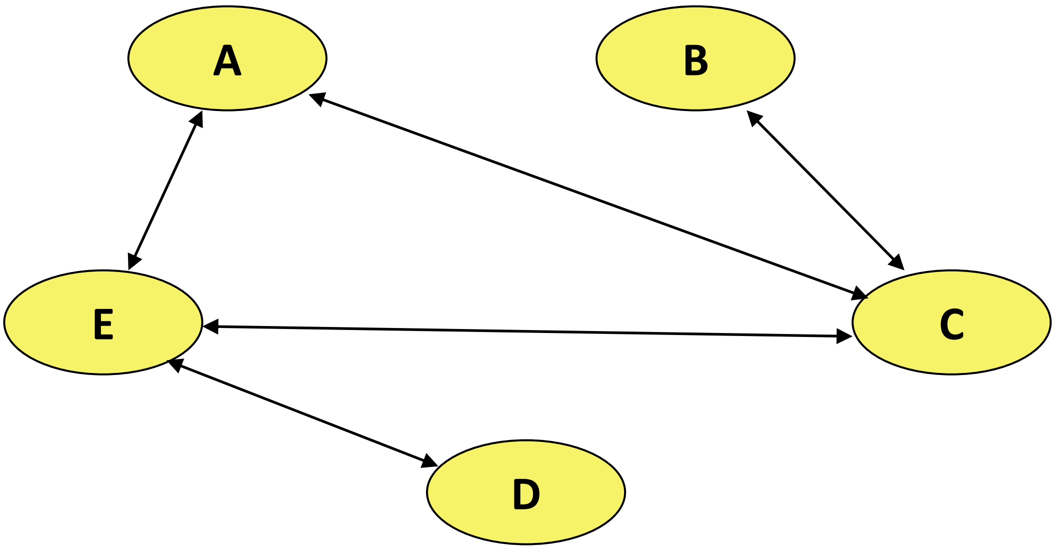
4 : Et enfin appuyer sur D



Dans ce cas-là seules quatre pressions suffisent à tout éteindre.

Par la suite, il devient vraiment laborieux de le faire à la main. Nous avons donc cherché une façon plus mathématique pour résoudre le problème. En effet pour un nombre d’ampoule supérieur à dix cela devient de plus en plus difficile à tout éteindre

Essayez donc de tout éteindre, avec ce schéma à 5 ampoules seulement.



Nous allons chercher un moyen qui nous permettrait d'éteindre « plus facilement » les ampoules, et ce sans tâtonner :

Définitions :

On fonctionne dans un système binaire, soit avec des 1 et des 0.

→ L'état de l'ampoule
1 = allumée
0 = éteinte

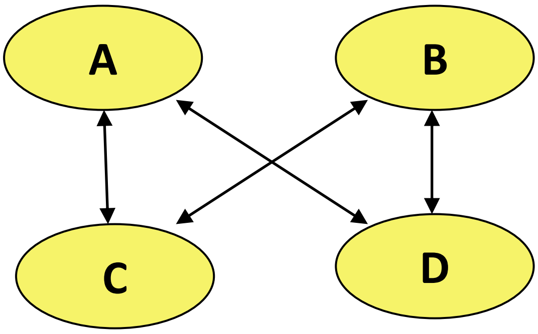
→ Action exercée sur l'ampoule
1 = appuyer (= changer d'état)
0 = Ne pas appuyer (= aucun changement d'état)

→ 0 + 0 = 0 (2)
1 + 1 = 0
0 + 1 = 1
1 + 0 = 1

Il a ainsi été décidé qu'une lampe éteinte serait notée 0 et une lampe allumée serait signalée par 1. Mais cela représente seulement l'état de la lampe, on peut définir aussi les actions : changer d'état = 1 et ne pas appuyer = 0, le problème se ramène donc à la résolution d'un système en binaire (0 et 1) qui utilise une addition : 1+1=0,1+0=1,0+0=0.

II - Résolution

Reprenons le premier exemple afin d'appliquer notre méthode qui consiste en réalité à résoudre une équation.



L'équation correspondant à chaque ampoule traduit les liaisons et les changements d'états de cette ampoule après l'action exercée sur les ampoules.

Soit,

Pour A, on a : 1x + 0y + 1z +1t = 1

Les inconnues (x,y,z,t…) **(3)** correspondent à l'action exercée sur chaque ampoule qui vaut 1 ou 0 suivant l'action exercée ou non sur l'ampoule. On veut que le résultat soit égal à 1 car nous avons au départ toutes les ampoules allumées et nous voulons changer l'état de chaque ampoule afin de tout éteindre.

On a : 1x qui correspond au changement d'état de A après action sur l'interrupteur de A

0y, car pas de liaison entre l'ampoule A et B.

Le multiplicateur de x correspond à la liaison ou non de l'ampoule avec l'ampoule A, celui de y correspond à la liaison ou non de l'ampoule avec l'ampoule de B, puis z avec C, t avec D et ainsi de suite.

Pour B, on a : 0x + 1y +1z + 1t = 1

Pour C, on a : 1x + 1y + 1z + 0t = 1

Pour D, on a : 1x +1y + 0z + 1t = 1

Toutes ces équations forment un système :

$$\begin{cases} 1x+0y+1z+1t=1 \\ 0x+1y+1z+1t=1 \\ 1x+1y+1z+0t=1 \\ 1x+1y+0z+1t=1 \end{cases}$$

Nous n'avons plus qu'à résoudre ce système, et pour cela nous allons utiliser les matrices avec la méthode du pivot de Gauss.

Le but de la méthode du pivot de Gauss est de transformer le système de départ en un système triangulaire. Le système peut se traduire dans la résolution d'une équation matricielle. Dans notre cas il faut transformer la matrice des liaisons en une matrice triangulaire :

Et pour cela on a le droit d'additionner les lignes entre elles sans oublier d'additionner les résultats.

Les liaisons entre les ampoules peuvent être représentées dans un tableau

	A	B	C	D
A	1	0	1	1
B	0	1	1	1
C	1	1	1	0
D	1	1	0	1

Ce tableau traduit les liaisons entre les ampoules on constate que pour notre problème tous les tableaux, matrices et systèmes présentent une diagonale de 1 en effet chaque ampoule est reliée, et interagit avec elle-même et on remarque une symétrie au niveau de la diagonale, ce qui est normal car si A interagit avec B alors B interagit avec A (ces deux points sont essentiels pour pouvoir résoudre notre problème).

La matrice des liaisons est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Voici notre équation matricielle de départ :

On commence à la triangulariser : (4)

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ A+C \\ A+D \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ A+C+B \\ A+D+B \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Après l'avoir triangularisée, résoudre ce système devient un jeu d'enfant :

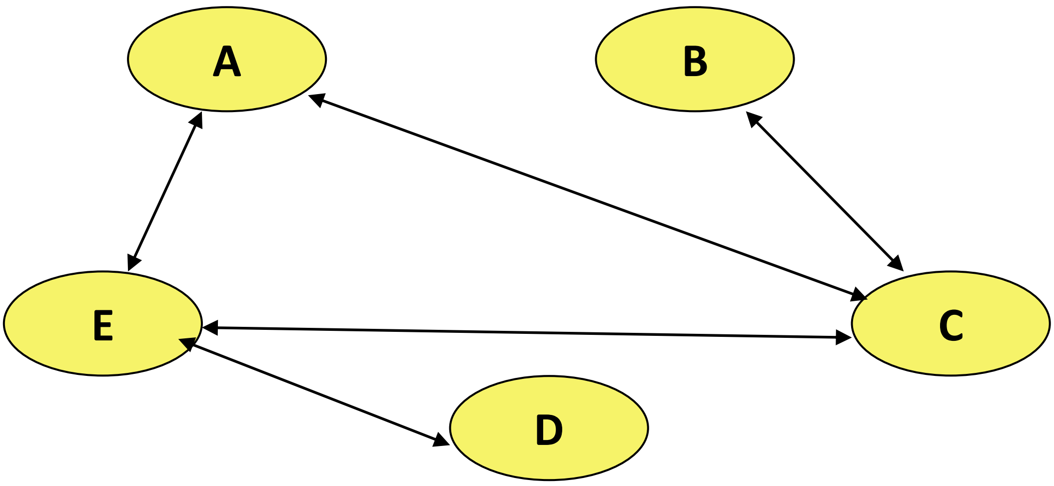
On a :

t = 1
z = 1
y + z + t = 1 ⇔ y + 1 + 1 = 1 ⇔ y + 0 = 1 ⇔ y = 1
x + z + t = 1 ⇔ x + 1 + 1 = 1 ⇔ x = 1

Par conséquent dans ce cas là on doit exercer une action sur toutes les ampoules afin de tout éteindre. (mais cela n'est pas toujours le cas selon le plan, voir le prochain exemple)

Application de la méthode sur le deuxième plan:

Reprenons le deuxième exemple,



Avec un tel plan intuitivement on aura quelques difficultés à tout éteindre, on effectuera souvent des étapes inutiles comme éteindre une ampoule puis la rallumer après.

<u>Utilisons notre méthode sur ce plan :</u>

On pourra directement remplir la matrice en imaginant un tableau à double entrée exprimant les liaisons tenues ou non entre deux ampoules.

	A	B	C	D	E
A	1	0	1	0	1
B	0	1	1	0	0
C	1	1	1	0	1
D	0	0	0	1	1
E	1	0	1	1	1

On observe bien la diagonale de 1 et la symétrie

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ \Leftrightarrow C \\ D \\ E \end{array} \left\{ \begin{array}{c} x+z+u=1 \\ y+z=1 \\ x+y+z+u=1 \\ t+u=1 \\ x+z+t+u=1 \end{array} \right.$$

Ou

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Utilisant le pivot de gauss sur la matrice :

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ \Leftrightarrow C+A \\ D \\ E+A \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ \Leftrightarrow C+A+B \\ D \\ E+A \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{r} A \\ B \\ \Leftrightarrow C+A+B \\ D \\ E+A+D \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Résolvant maintenant ce système :

On a :

$u = 1$

$t + u = 1 \Leftrightarrow t + 1 = 1 \Leftrightarrow t = 0$

$z = 1$

$y + z = 1 \Leftrightarrow y + 1 = 1 \Leftrightarrow y = 0$

$x + z + u = 1 \Leftrightarrow x + 1 + 1 = 1 \Leftrightarrow x + 0 = 1 \Leftrightarrow x = 1$

Rappelons que :

- x correspond à l'action exercé sur A
- y correspond à l'action exercé sur B
- zcorrespond à l'action exercé sur C
- t correspond à l'action exercé sur D
- u correspond à l'action exercé sur E

On a :

$x = 1$ soit on appuie sur l'interrupteur A

$y = 0$ soit on n'appuie pas sur l'interrupteur B

$z = 1$ soit on appuie sur l'interrupteur C

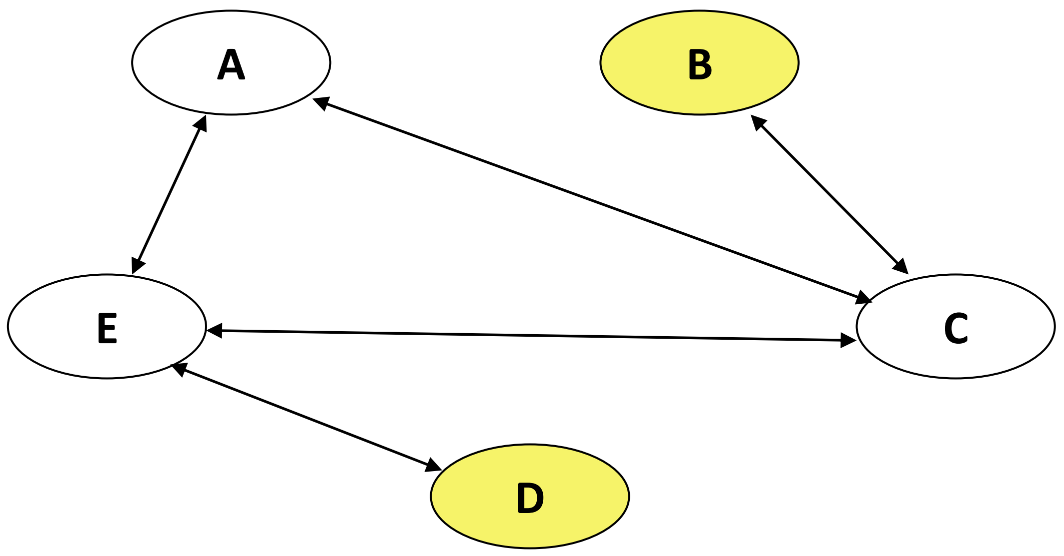
$t = 0$ soit on n'appuie pas sur l'interrupteur D

$u = 1$ soit on appuie sur l'interrupteur E

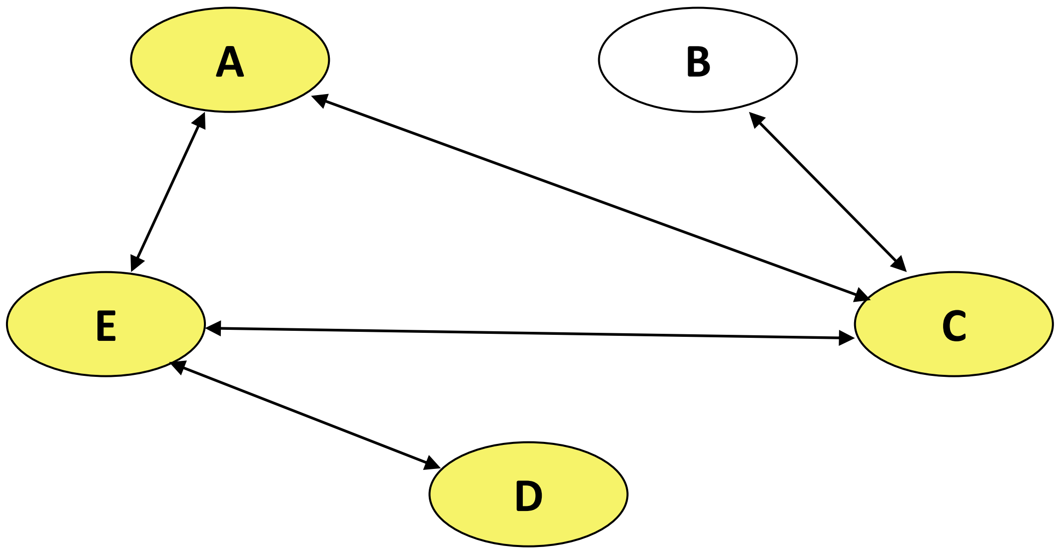
Donc en appuyant sur l'interrupteur contrôlant l'ampoule A, C et E on éteindra toute les lumières.

<u>Vérification en image :</u>

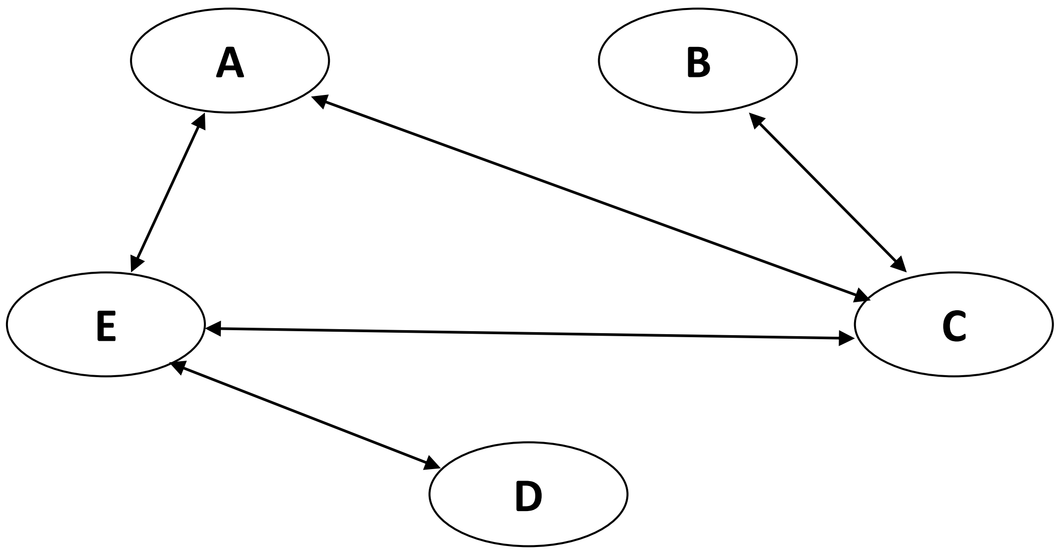
1-Appuyer sur A



2- Puis appuyer sur C



3- Et enfin appuyer sur E



On a bien fini par tout éteindre en actionnant que 3 interrupteurs sur les 5

DEUXIEME PARTIE

Théorème

Quelle que soit la configuration du circuit, il existe toujours une solution pour éteindre toutes les lumières.

1. Vocabulaire et propriétés des graphes utilisés dans cette partie

1.1 Premières définitions

Un graphe fini G=(V,E) est défini par l'ensemble fini V={v1, v2, ..., vn} dont les éléments sont appelés sommets (Vertices en anglais), et par l'ensemble fini E={e1, e2, ..., em} dont les éléments sont appelés arêtes (Edges en anglais). Une arête e de l'ensemble E est définie par une paire non ordonnée de sommets, appelés les extrémités de e. Si l'arête e relie les sommets a et b, on dira que ces sommets sont adjacents. On appelle ordre d'un graphe le nombre de sommets n de ce graphe.
Dans notre problème, chaque sommet correspond à une ampoule, et chaque arête est une liaison dans notre problème.

1.2 Le sous-graphe

Pour un sous-ensemble A de sommets inclus dans V, le sous-graphe de G induit par A est le graphe G'=(A,E(A)) dont l'ensemble des sommets est A et l'ensemble des arêtes E(A) est formé de toutes les arêtes de G ayant leurs deux extrémités dans A. Autrement dit, on obtient G′ en enlevant un ou plusieurs sommets au graphe G, ainsi que toutes les arêtes reliées à ces sommets.

1.3 Utilisation du lemme des poignées de main (5)

On appelle degré d'un sommet, le nombre d'arêtes relatives à ce sommet. On note le degré d'un sommet v : $d(v)$

Pour tout graphe fini à n sommets et m arêtes, la somme des degrés des sommets est égale à deux fois le nombre d'arêtes. Soit : (6)

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

(Lemme des poignées de main)

On en tire la proposition suivante pour notre réseau d'ampoules :

Le nombre d'ampoules dont le degré est impair est pair.

Démonstration :

On procède par l'absurde :

- Supposons que le nombre d'ampoules de degrés impair est impair.

- Alors la somme des degrés des sommets de ces ampoules est impaire (car la somme d'un nombre impair d'entiers impairs est impaire).
- Comme la somme des degrés des sommets de degrés pair est paire (car la somme d'un nombre pair d'entiers pairs est paire), alors la somme des degrés de tous les sommets du graphe est impaire (car la somme de tout entier pair avec un entier impair est un nombre impair).
- On aboutit à une contradiction avec le principe établi plus haut. La supposition est absurde.

2. Démonstration du théorème[1]

2.1 Application du pivot de Gauss

Comme écrit dans la partie précédente, on peut ramener le problème à un système de n équations à n inconnues. On résout ensuite ce système à l'aide du pivot de Gauss. On observe alors deux possibilités dans la résolution du système

2.1.1 1e possibilité : Avec une unique solution

On applique le pivot de Gauss et on aboutit à un système « télescopique » de n équations à n inconnues de ce type :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots\dots\dots\dots\dots\dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots\dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \\ \qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

où les coefficients $a_{11},\dots,a_{nn}$ sont non nuls. Du fait de sa résolution « en cascade », ce type de système (après application du pivot, bien entendu) admettra toujours une unique solution.

2.1.2 Avec la perte d'une inconnue

En appliquant le pivot de Gauss, on peut assister à la perte d'une inconnue, et ceci de deux manières :

On observe une impossibilité :

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Donne en additionnant les deux premières lignes : 0=1 ; le système n'admet donc aucune solution.

De même, on observe, parfois une répétition :

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ \quad x + y = 0 \end{cases}$$

---

[1] Cette partie de l'article a été reprise partiellement par les enseignants et le chercheur en respectant l'esprit du texte. Les élèves avaient trouvé la démonstration en atelier mais la rédaction qu'ils en ont fournie était incomplète.

En additionnant les deux premières lignes, on a : 0 = 0 : le système admet plusieurs solutions. Il faut noter que si l'on travaille dans $\mathbb{R}^3$ **(7)**, on observe une infinité de solutions. Mais comme on se situe ici dans $\{0,1\}^3$, on en observe seulement deux. **(8)**

Démontrer que l'on peut toujours avoir au moins une solution revient donc à démontrer que le cas d'une impossibilité est exclu dans notre système d'ampoule.

2.2 Extraction d'un sous-graphe

Le système correspondant au problème des ampoules est un système dont les coefficients sont dans {0,1}. Les coefficients présentent une symétrie (due au fait que la liaison entre deux ampoules marche dans les deux sens) ce qui s'exprime par $a_{ij} = a_{ji}$. Enfin , les coefficients diagonaux valent 1 (puisqu'une action sur une ampoule agit sur elle-même) ce qui s'exprime par $a_{ii} = 1$.

Pour que le système ne soit pas résolvable, il faudrait obtenir, avec l'application du pivot de Gauss, en combinant des lignes $i_1, ..., i_k$ afin d'en supprimer des inconnues (selon les principes de l'addition en binaire) une ligne du type $0x_1 + 0x_2 + ...0x_n = 1$.

On considère alors le sous graphe formé des sommets $i_1, ..., i_k$. Celui-ci a *les mêmes propriétés que le graphe de départ* .

2.3 Application du lemme des poignées de mains au sous-graphe

Pour que l'annulation dans le membre de gauche soit effective, il faut que les arêtes « s'annulent entre elles ». Or ceci n'est possible que dans le cas d'un graphe où le nombre de sommets est pair .

En effet :

Les parties des membres de gauche des équations concernant les sommets $i_1, ..., i_k$ donnent:

$$\begin{cases} x_{i_1} + a_{i_1 i_2} x_{i_2} ..... + a_{i_1 i_k} x_{i_k} \\ \\ \\ a_{i_k i_1} x_{i_1} + a_{i_k i_2} x_2 ..... + x_{i_k} \end{cases}$$

Pour que les coefficients de la première colonne s'annulent, il faut que la somme des coefficients autres que le 1 de la première ligne donne 1 ce qui revient à dire que $a_{i_2 i_1 + ... +} a_{i_k i_1} = 1$ et par la symétrie évoquée au 2.2, cela donne $a_{i_1 i_2 + ... +} a_{i_1 i_k} = 1$. Cette somme donne la parité du degré du sommet i_1 qui est donc impair. La même démarche conduit à ce que tous les sommets $i_1, ..., i_k$ soient de degrés impairs. Le résultat 1.3 donne donc que *k* est pair, donc l'égalité montrant une contradiction est impossible.

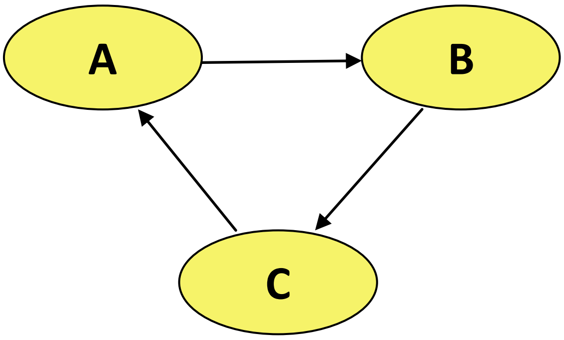
Cela implique que quel que soit le graphe considéré, on peut toujours parvenir à éteindre ou allumer toutes les ampoules.

De plus, la résolution complète du système donne une solution pratique pour éteindre (voir partie 1 pour un exemple).

TROISIEME PARTIE

Le problème résolu, nous avons cherché à compliquer l'énoncé :

Nous nous sommes demandés si les propriétés de la matrice étaient très importantes : ne pouvant supprimer la diagonale de 1 puisque l'interrupteur doit obligatoirement agir sur son ampoule, nous avons supprimé la symétrie. Pour ce faire, nous avons supprimé la réciprocité en rajoutant des « diodes ». En électronique, les diodes laissent passer le courant dans un sens uniquement. La Fig.1 est l'exemple le plus simple avec trois ampoules dont la matrice correspondante n'est plus symétrique. Nous pouvons donc raisonner ainsi :



Avec cette configuration on a des interactions très particulières entre les ampoules. Toute action sur l'ampoule A implique un changement d'état de l'ampoule B. Mais une action sur l'ampoule B n'a aucune influence sur l'état de l'ampoule A. Cela est du aux caractéristiques de la diode

On utilise le même principe que pour les plans précédents, créons un tableau de liaison :

	A	B	C
A	1	1	0
B	0	1	1
C	1	0	1

On a bien une diagonale de 1 mais pas la symétrie.

On aurait alors comme équation matricielle :

$$\begin{array}{c} A \\ B \\ C \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ C+A \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{array}{c} A \\ B \\ C+A+B \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a : 0z = 1 pas de solution

Le système n'a pas de solution on ne peut donc pas éteindre les lumières dans ce cas-là, voilà pourquoi la symétrie est importante. **(9)**

Notes d'édition :

(1) Traduction du sujet par certains élèves étudiant le chinois.
(2) Comme il n'y a que deux valeurs en binaire, la dernière convention peut être vue comme la conséquence qu'ajouter 1 à nombre donne un nombre différent (d'où 1+1=0).
(3) Pour cet exemple, seules les quatre premières lettres suffisent. Les trois points sont là pour anticiper sur des cas avec plus de lumières.
(4) Les actions marquées par la suite sont faites uniquement sur les matrices et sur le vecteur à droite du signe d'égalité, le vecteur des (x, y, z, t) ne bougeant pas. Pour bien comprendre le principe, il faut savoir qu'un produit matriciel consiste à multiplier chaque terme de la première ligne par chaque composante du vecteur (x, y, z, t) puis de faire la somme (pour la première ligne, cela donne 1x+0y+1z+1t) et de recommencer pour chaque ligne ; nous retrouvons ainsi un vecteur composé de toutes les lignes du système de la page précédente. Faire des opérations sur les matrices permet de faire des opérations sur les systèmes sans avoir à recopier les inconnues x, y, z ou t à chaque fois.
(5) Ce lemme a été introduit par Euler en 1736. Le principe est de compter pour chaque main le nombre de poignées de mains faites. Comme une poignée de main est forcément réciproque (si je sers la main à quelqu'un, il fait la même chose de son côté) alors le nombre de poignées de main sera forcément un nombre pair.
(6) Comme un sommet est relié à un autre, pour chaque arête, il y a forcément deux sommets. Donc, la somme des arêtes est égale à la moitié de celle des degrés des sommets. Ce qui donne le résultat.
(7) Remarquons que, par exemple, tous les triplets de la forme (x,-x,1), avec x prenant n'importe quelle valeur réelle, est solution de l'équation dans $\mathbb{R}^3$.
(8) Ces deux solutions sont (1,1,1) et (0,0,1). Ceci est en accord avec la remarque (7) puisque 0=-0 et, en binaire, -1=1 (car 1+1=0).
(9) Notons toutefois qu'il existe des solutions pour certains cas comme par exemple si le nombre de sommets est 4 et si chaque sommet agit sur un seul en formant un cycle comme dans le cas de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

qui possède les solutions (1,0,1,0) et (0,1,0,1).