

Faire Routage

Année 2016 – 2017

Titouan Olivier-Choupin, Marco Cavagna-Garcia, élèves de 4ème.

Encadrés par Annabelle Joannic, Anne Champeau et Cécile Grelet

Établissement : Collège Le Grand Som, Saint Laurent-du-Pont (38)

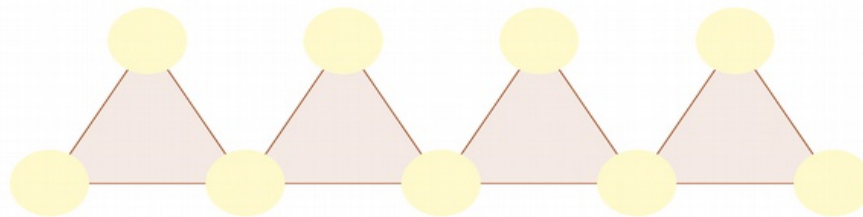
Chercheur : Eric Fontenas, Laboratoire Jean Kuntzmann (Université Grenoble Alpes).

1. Présentation du sujet

Pour partir en vacances, rien ne vaut la Société Nouvelle du « Comment Faire ? ».

Elle propose des solutions de déplacement ferroviaire, mais celles-ci imposent que les charges incombant à la locomotive réalisent un équilibre contrôlé graphiquement par le diagramme ci-dessous, où :

- chacun des nombres de 1 à 9 doit apparaître dans les cellules (ce sont les charges à mettre dans les disques ci-dessous) ;
- la somme des trois nombres de chaque triangle doit être 13 (charge totale par wagon).



2. Annnonce des conjectures et résultats obtenus

Cet article présente une solution au problème posé et les développements que nous en avons tirés, en modifiant la charge totale par wagon ou le nombre de wagons (soit de triangles).

Pour cela, nous avons écrit plusieurs programmes SCRATCH.

Enfin, nous avons observé et justifié qu'il n'était pas possible de trouver une solution avec 4 wagons et une charge totale de 15 par wagon.

3. Texte de l'article

3.1. Méthodes de résolution

3.1.1. Méthode 1: Sur papier

Nous avons essayé de trouver un maximum de solutions avec la somme égale à 13 en commençant par le chiffre 1 dans le cercle tout à droite puis, nous avons complété les deux autres chiffres du triangle avec les compléments à 12 : 3/9;4/8;5/7;(pas de 6/6 car il y a deux nombres identiques) ; puis 7/5;8/4 ;9/3. Et ainsi de suite ...

3.1.1. Méthode 2: Sur scratch

a) Nous avons créé une première réalisation sur scratch (voir annexe) pour être beaucoup plus rapide. Ce fut le cas.

Notre première technique donnait des solutions correctes mais en tirait une au hasard, nous n'étions donc pas sûrs que toutes les solutions sortaient.

b) Nous avons ensuite créé un autre script qui testait tous les nombres de 1 à 9 dans chaque cellule et qui s'arrêtait quelques secondes pour que nous notions le résultat quand tous les nombres étaient différents et que la somme de chaque triangle était égale à 13.

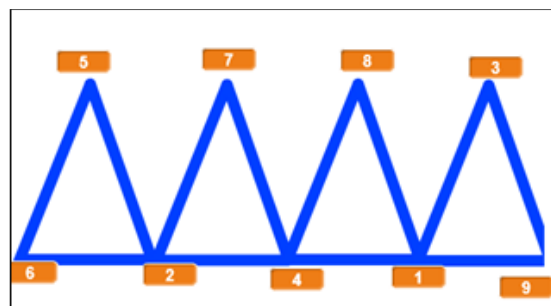
c) Nous avons reproduit le script précédent mais avec une liste qui retenait nos résultats. Cela nous a permis de lancer le programme sans être obligés de regarder tout le temps.

3.2. Résultats

3.2.1. Méthode de représentation

Nous représentons les résultats de la manière suivante : le premier nombre est celui en bas à gauche, le deuxième en haut à gauche, le troisième celui à côté du premier, le quatrième celui au-dessus du troisième, etc ...

Dans l'exemple ci-contre, on écrit la solution sous la forme : 652748139.



3.2.2. Solution au problème posé

Nous avons trouvé 8 solutions pour 4 triangles et une somme totale de 13 par triangle :

391847256	931847256	562748139	562748193
652748193	652748139	931847265	391847265

Nous avons remarqué que les huit résultats étaient très ressemblants :

- soit on inverse les deux premiers chiffres ou les deux derniers (exemple : 391847265 et 391847256);
- soit on inverse entièrement le tableau (symétrie axiale) (exemple : 391847256 et 652748193).

Dans la suite, nous ne marquerons donc plus que le premier résultat dans l'ordre numérique, soit ici 391847256. (1)

3.2.3. Autres résultats

Nous avons étendu nos recherches à des trains avec 2 ou 3 wagons (ou triangles), ainsi qu'à différentes charges totales par wagon. (2)

1) Pour deux triangles

Somme totale par triangle	8	9	10
Résultats	25134	15324	14523

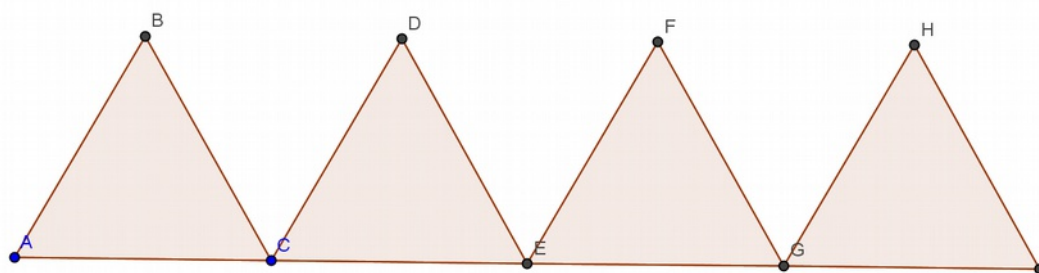
2) Pour trois triangles

Somme totale par triangle	11	12	13
Résultats	2546137 1736245	1564237 1654372 2374156	1572436 1752634

3) Pour quatre triangles

Somme totale par triangle	13	14	16	17
Résultats	391847256	176539248 194827536 284917635 293476158 392485167	178625934 187634925 196283547 268175439 286193457	179263845

3.3. Théorème



Nous nous sommes rendus compte que pour trouver la somme des trois nombres correspondants aux sommets de deux triangles à la fois (C; E; G), il fallait multiplier la somme demandée dans chaque triangle par le nombre de triangles et soustraire à ce produit la somme de tous les poids à placer.

Théorème : La différence du produit de la somme demandée dans chaque triangle et du nombre de triangles par la somme de tous les poids à placer est égale à la somme des charges positionnées sur deux triangles à la fois.

Démonstration :

Somme sur le triangle 1 : $A+B+C$

Somme sur le triangle 2 : $C+D+E$

Somme sur le triangle 3 : $E+F+G$

Somme sur le triangle 4 : $G+H+I$

La somme demandée dans chaque triangle est toujours la même, donc

$$A+B+C=C+D+E=E+F+G=G+H+I$$

Le produit de la somme demandée dans chaque triangle et du nombre de triangles nous donne :

$$\text{la somme demandée dans chaque triangle} \times 4 = (A+B+C) \times 4 = A+B+C + C+D+E + E+F+G + G+H+I$$

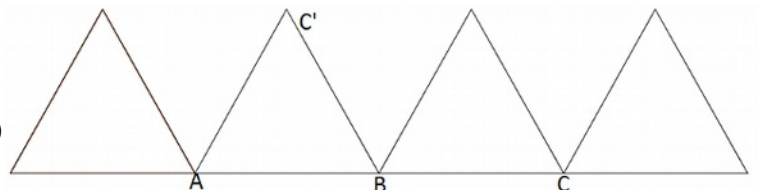
La somme de tous les poids à placer = $A+B+C+D+E+F+G+H+I$

La différence du produit de la somme demandée dans chaque triangle et du nombre de triangles par la somme de tous les poids à placer est égale à

$$(A+B+C+C+D+E+E+F+G+G+H+I) - (A+B+C+D+E+F+G+H+I) \text{ , soit } C+E+G \text{ .}$$

Application : Pour 4 triangles et la somme totale de 15 par triangle.

Quand la somme de chaque triangle est égale à 15, avec 4 triangles, il est impossible de trouver une solution car quand on applique notre théorème on trouve que la somme des trois nombres (A, B et C) est égale à 15.



Et si $A+B+C=15$, la somme des 3 nombres est égale à la somme demandée dans chaque triangle.

En effet, prenons deux nombres différents A et B.

C devra être le complément à 15 de la somme de ces deux nombres.

Or, C' devrait aussi être le complément à 15 de la somme des deux nombres.

Donc C et C' devraient être égaux, mais ce n'est pas possible car on n'a qu'une seule charge de chaque poids.

4. Conclusion

Nous avons créé un programme SCRATCH (3) pour trouver toutes les solutions possibles à notre problème originel d'équilibrage sur 4 wagons avec des charges entières de 1 à 9 et une charge totale de 13 par wagon.

Ensuite nous l'avons modifié pour trouver les solutions en prenant des charges totales par wagon différentes.

Enfin nous avons adapté notre problème de départ en diminuant le nombre de wagons et donc la valeur maximale des charges.

Finalement, nous avons démontré une relation entre les charges, le nombre de wagons et la charge totale par wagon. Nous l'avons utilisé pour justifier que nous n'avions pas trouvé de solution pour 4 wagons et une charge totale de 15 par wagon.

ANNEXE : Programme SCRATCH

The image shows a Scratch script for a game. It starts with a 'when clicked' event, followed by a 'show' block. A 'repeat indefinitely' loop contains the following logic:

- Set `nb1` to a random number between 1 and 9.
- If $13 - nb1 < 9$, set `nb1<2` to $12 - nb1$.
- Otherwise, set `nb1<2` to 9.
- Set `nb2` to a random number between 1 and `nb1<2`.
- Set `nb3` to $13 - nb1 - nb2$.
- If $13 - nb3 < 9$, set `nb1<2` to $12 - nb3$.
- Otherwise, set `nb1<2` to 9.
- Set `nb4` to a random number between 1 and `nb1<2`.
- Set `nb5` to $13 - nb3 - nb4$.
- If $13 - nb5 < 9$, set `nb1<2` to $12 - nb5$.
- Otherwise, set `nb1<2` to 9.
- Set `nb6` to a random number between 1 and `nb1<2`.
- Set `nb7` to $13 - nb5 - nb6$.
- If $13 - nb7 < 9$, set `nb1<2` to $12 - nb7$.
- Otherwise, set `nb1<2` to 9.
- Set `nb8` to a random number between 1 and `nb1<2`.
- Set `nb9` to $13 - nb7 - nb8$.

After the loop, there are three conditional checks:

- If $nb1 < 10$ and $nb2 < 10$ and $nb3 < 10$.
- If $nb1 > 0$ and $nb2 > 0$ and $nb3 > 0$.
- If **non** $nb1 = nb2$ or $nb1 = nb3$.

If all these conditions are met, the script waits for 3 seconds.

Notes d'édition

[1] L'ordre numérique (en fait, l'ordre croissant) mentionné à la fin de 3.2.2 peut être utilisé car les différents paramètres sur lesquels on peut jouer pour transformer une solution en une autre sont indépendants, sinon cela ne fonctionnerait pas.

[2] Ici, on pourrait lister les valeurs des « différentes charges » en expliquant pourquoi prendre celles-ci et pas d'autres.

[3] Un regret : le programme scratch est coupé.