

# Footing

Année 2022 – 2023

Romane Ferrandis, Lucie Correia, élèves de première générale

**Établissement :** Lycée Blaise Pascal, Orsay

**Enseignantes :** Hélène Cochard, Cécile Chipot

**Chercheuse :** Blandine Galiay, ENS Paris-Saclay

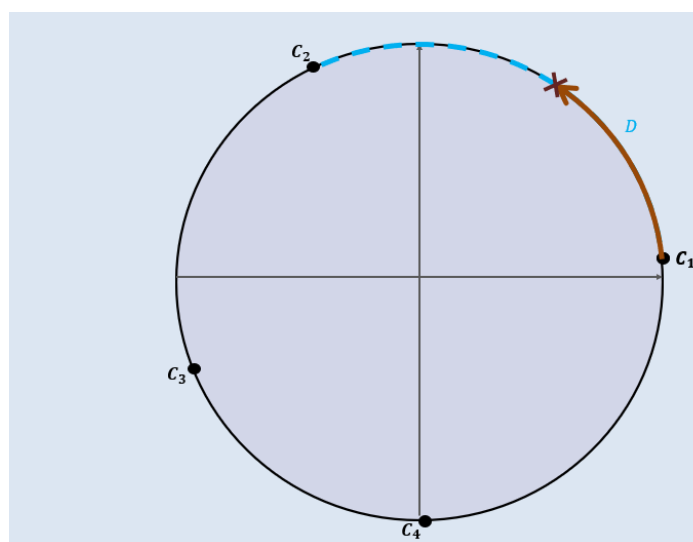
## 1. Présentation du sujet

Soit  $p \in [0, 1]$  et  $M \in \mathbb{R}^*$

Le stade municipal est occupé par des gens qui font leur footing. On suppose que le nombre de coureurs ne change pas au cours du temps. L'allure d'un coureur est influencée par le coureur le précédent, si bien qu'à chaque minute, chaque coureur a avancé de  $M$  mètres, plus  $p$  fois la distance qui le sépare du coureur devant lui. Peut-on prévoir la répartition des coureurs sur le terrain à long terme ?

Pour la suite de la résolution, nous négligeons  $M$  en considérant que cette variable n'a pas d'incidence sur la répartition du terrain car cette distance reste constante pour tous les coureurs et nous choisissons de modéliser le terrain par un cercle trigonométrique.

On a donc, sur un stade municipal, des sportifs ( $C_i$ , avec  $i$  fixé) courant tel que :



**Schéma 1 :** stade avec 4 coureurs où est représentée la distance parcourue par le coureur  $C_1$  en une minute pour  $p=0,5$

Légende :

- $C_i$  : coureur  $i$
- $D$  : distance qui sépare le coureur 2 du coureur 1 à l'instant  $n$
- : distance parcourue par le coureur 1 à l'instant  $n+1$

Si à l'instant  $n$ , la distance  $D$  sépare  $C_1$  de  $C_2$ , alors à l'instant  $n+1$ ,  $C_1$  aura parcouru une distance  $d=p \times D$  (avec  $p \in [0 ; 1]$  fixé).

Nous remarquons que lorsque  $p=0$ , lorsque  $p=1$ , ainsi que lorsque les angles qui séparent deux coureurs sont nuls, la répartition du terrain n'évolue pas (pour  $p=0$ , les coureurs sont immobiles, et pour  $p=1$ , les athlètes courent donc tous la même distance : la distance entre les coureurs n'évoluera donc pas au cours du temps).

On fixe donc  $p \in ]0; 1[$ .

## 2. Résultats

Nous avons conjecturé que les coureurs s'éloigneront le plus possible les uns des autres au fil du temps, donc que les angles entre les coureurs tendent à s'approcher du périmètre du cercle ( $2\pi$ ) divisé par le nombre de coureurs :

Avec **angles initiaux**  $\neq 0$  (et pour  $p \neq 0$  et  $p \neq 1$ )

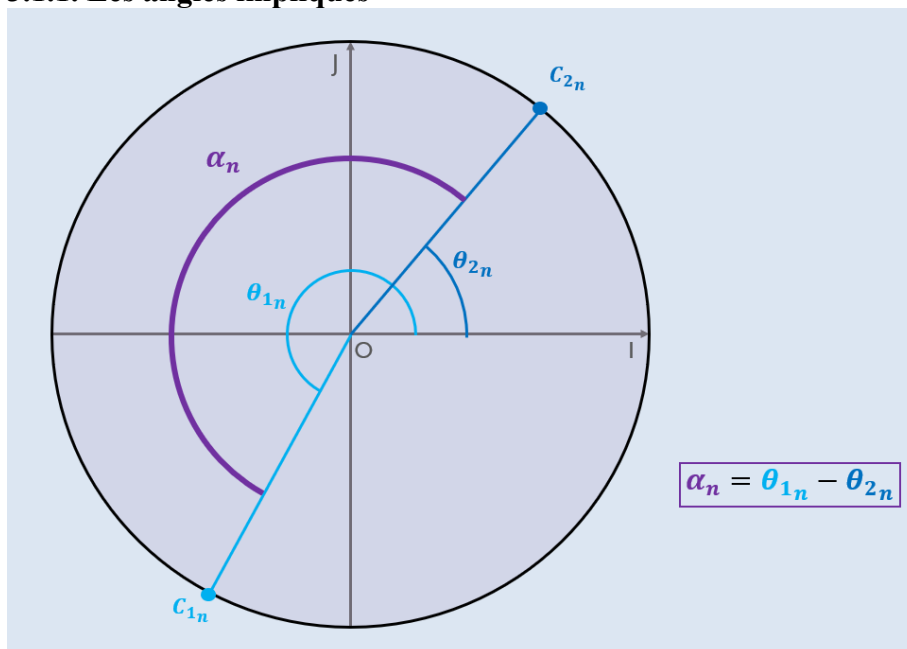
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{angles} = \frac{2\pi}{\text{nbre de coureurs}}$$

Nous avons réussi à démontrer cette formule avec deux et trois coureurs, mais nous n'avons pas eu le temps de prouver la formule générale.

## 3. Résolution du problème

### 3.1. Etude pour deux coureurs :

#### ➤ 3.1.1. Les angles impliqués



**Schéma 2** : Stade avec deux coureurs angles associés

L'angle  $\alpha_n$  sépare le coureur 1 du coureur 2 à l'instant n. ( $\alpha_0 \neq 0$ )

#### ➤ 3.1.2. Relation de récurrence et limite éventuelle

On pose :  $\alpha_n = \theta_{2n} - \theta_{1n}$

$\alpha_n$  représente la distance qui sépare le coureur 1 du coureur 2.

On cherche à trouver la relation de récurrence de la suite  $(\alpha_n)$

Par définition, le coureur 1 avance de  $p\alpha_n$  et le coureur 2 de  $p(2\pi - \alpha_n)$

$$\theta_{1_{n+1}} = \theta_{1_n} + p\alpha_n \quad \text{et} \quad \theta_{2_{n+1}} = \theta_{2_n} + p(2\pi - \alpha_n)$$

$$\text{On a : } \alpha_{n+1} = \theta_{2_{n+1}} - \theta_{1_{n+1}}$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \theta_{2_n} + p(2\pi - \alpha_n) - (\theta_{1_n} + p\alpha_n)$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = (\theta_{2_n} - \theta_{1_n}) + p(2\pi - \alpha_n) - p\alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n + 2p\pi - p\alpha_n - p\alpha_n$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha_{n+1} = (-2p + 1)\alpha_n + 2p\pi}$$

On a donc trouvé une relation de récurrence sur la suite  $(\alpha_n)$ . Celle-ci est arithmético-géométrique.

### ➤ 3.1.3. Etude de la limite de $\alpha_n$ et conclusion

**Théorème 1 :** Si  $(\alpha_n)$  admet une limite  $l$ , alors  $l = \pi$

**Démonstration :**

Si  $(\alpha_n)$  admet une limite  $l$ , alors  $l$  est une valeur fixe de la relation de récurrence :

$$l = (-2p + 1)l + 2p\pi$$

$$\Leftrightarrow -2p\pi = (-2p + 1)l - l$$

$$\Leftrightarrow -2p\pi = (-2p + 1 - 1)l$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l = \pi}$$

■

**Théorème 2 :**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$

**Démonstration :**

On définit la suite  $(u_n)$  par :

$$u_n = \alpha_n - \pi$$

On a alors,

$$u_{n+1} = \alpha_{n+1} - \pi$$

$$u_{n+1} = (-2p + 1)\alpha_n + 2p\pi - \pi$$

$$u_{n+1} = (-2p + 1)\alpha_n + (2p - 1)\pi$$

$$u_{n+1} = -(2p - 1)(\alpha_n - \pi)$$

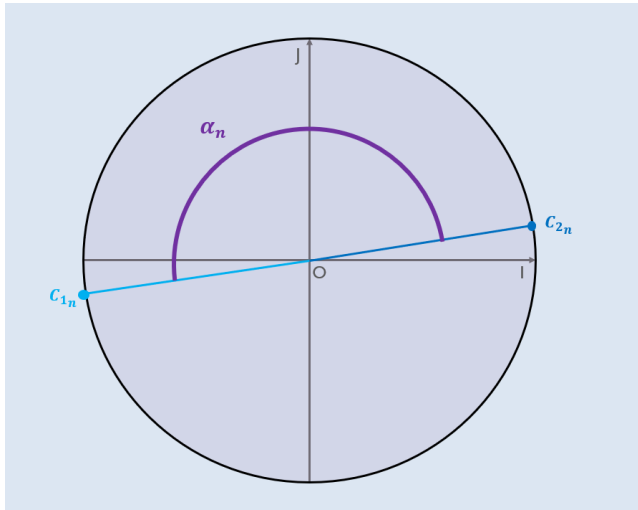
$$\boxed{u_{n+1} = -(2p - 1)u_n}$$

On reconnaît donc l'écriture d'une suite géométrique de raison  $(-2p + 1)$ .

Comme  $p \in ]0; 1[$ ,  $(-2p + 1) \in ]-1; 1[$ . Par conséquent, la suite  $(u_n)$  converge vers 0, on a donc :

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0} \quad \text{et par somme de limites} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi}$$

■

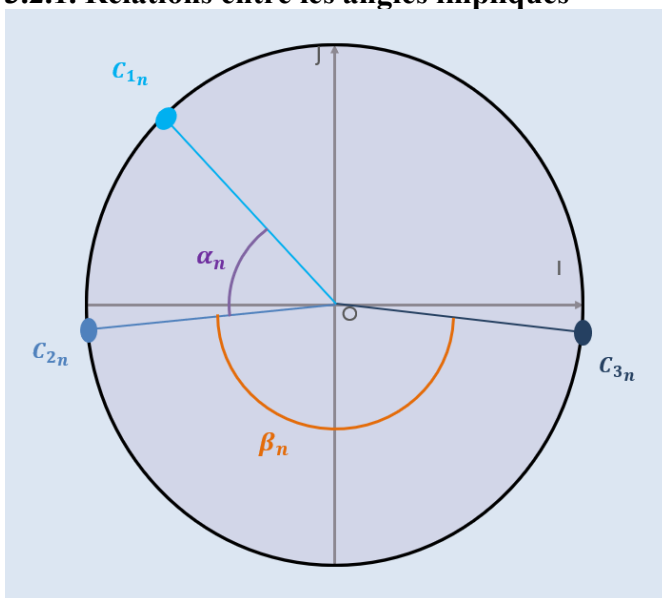


**Schéma 3** : position limite pour deux coureurs

On remarque que les coureurs tendent à s'éloigner le plus possible.

### 3.2. Etude pour trois coureurs :

#### ➤ 3.2.1. Relations entre les angles impliqués



**Schéma 4** : stade avec 3 coureurs, angles associés

On a donc les positions des coureurs 1, 2 et 3 à l'instant  $n$  auxquelles correspondent respectivement les angles  $\theta_{1n}$ ,  $\theta_{2n}$  et  $\theta_{3n}$ .

L'angle  $\alpha_n$  est la différence entre  $\theta_{2n}$  et  $\theta_{1n}$  et l'angle  $\beta_n$  entre  $\theta_{3n}$  et  $\theta_{2n}$ .

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \theta_{2n} - \theta_{1n} \\ \beta_n &= \theta_{3n} - \theta_{2n}\end{aligned}$$

**Théorème 3** : Relation de récurrence sur les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= (1-p)\alpha_n + p\beta_n \\ \beta_{n+1} &= -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi\end{aligned}$$

**Démonstration :**

On a par définition des avancées des coureurs :

$$\begin{cases} \theta_{1_{n+1}} = \theta_{1_n} + p\alpha_n & (1) \\ \theta_{2_{n+1}} = \theta_{2_n} + p\beta_n & (2) \\ \theta_{3_{n+1}} = \theta_{3_n} + p(2\pi - \alpha_n - \beta_n) & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1): \quad \alpha_{n+1} = \theta_{2_n} + p\beta_n - (\theta_{1_n} + p\alpha_n) \quad (1)$$

$$(3) - (2): \quad \beta_{n+1} = \theta_{3_n} + p(2\pi - \alpha_n - \beta_n) - (\theta_{2_n} + p\beta_n) \quad (2)$$

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \theta_{2_n} + p\beta_n - \theta_{1_n} - p\alpha_n \Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \alpha_n - p\alpha_n + p\beta_n \\ &\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = (1-p)\alpha_n + p\beta_n\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\alpha_{n+1} = (1-p)\alpha_n + p\beta_n}$$

$$\begin{aligned}(2) &\Leftrightarrow \beta_{n+1} = \theta_{3_n} + 2p\pi - p\alpha_n - p\beta_n - \theta_{2_n} - p\beta_n \\ &\Leftrightarrow \beta_{n+1} = \beta_n + 2p\pi - p\alpha_n - 2p\beta_n \\ &\Leftrightarrow \beta_{n+1} = 2p\pi - p\alpha_n(1-2p)\beta_n\end{aligned}$$

Donc,

$$\boxed{\beta_{n+1} = -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi}$$

On trouve donc la relation de récurrence pour sur les deux angles (Quand  $\alpha_0 \neq 0$  et  $\beta_0 \neq 0$ ). ■

### ➤ 3.2.2. Calcul de limites potentielles

**Théorème 4 :** Si  $(\alpha_n)$   $(\beta_n)$  convergent alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{2\pi}{3}$$

**Démonstration :** en appelant  $\alpha$  et  $\beta$  les limites alors celles-ci sont des valeurs pour lesquelles les suites n'évoluent pas :

$$\alpha = (1-p)\alpha + p\beta \quad (1)$$

$$\beta = -p\alpha + (1-2p)\beta + 2p\pi \quad (2)$$

$$(1) : -p\beta = (1-p)\alpha - \alpha \Leftrightarrow -p\beta = \alpha - p\alpha - \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha$$

$$(2) : \alpha = -p\alpha + (1-2p)\alpha + 2p\pi \Leftrightarrow \alpha + p\alpha - \alpha + 2p\alpha = 2p\pi \Leftrightarrow 3p\alpha = 2p\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Donc :

$$\boxed{\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}}$$

Nous devons maintenant démontrer que les deux suites convergent. ■

**Théorème 5 :**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{2\pi}{3}$$

➤ 3.2.3. Démonstration du théorème 5

**Lemme 1 : Mise sous forme matricielle**

On pose  $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n - \frac{2\pi}{3}$  ;  $\widetilde{\beta}_n = \beta_n - \frac{2\pi}{3}$

Ces suites sont définies par légalité matricielle :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0 \\ \widetilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

Où  $K$  est la matrice donnée par  $K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$

**Démonstration du lemme 1 :**

Pour la démonstration, nous allons regrouper nos valeurs sous forme de matrice :

On pose  $M_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)\alpha_n + p\beta_n \\ -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)\alpha_n + p\beta_n \\ -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow M_{n+1} = \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

On a donc,

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} M_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

On reconnaît une relation de récurrence d'une suite arithmético-géométrique

Or, d'après, le théorème 4 la suite constante  $\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$  est invariante pour la relation de

récurrence. On a donc,

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

On soustrait :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} - \left( \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_n - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Comme  $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n - \frac{2\pi}{3}$  ;  $\widetilde{\beta}_n = \beta_n - \frac{2\pi}{3}$ .

La relation de récurrence sur ces suites est donc donnée par :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{n+1} \\ \widetilde{\beta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix}$$

En posant  $K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$  et  $\tilde{M}_n = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix}$ , on a donc

$$\boxed{\tilde{M}_{n+1} = K \tilde{M}_n}$$

$(\tilde{M}_n)$  est donc géométrique et :

$$\tilde{M}_n = K^n \tilde{M}_0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix}}$$

On cherche maintenant à démontrer que cette suite matricielle converge vers 0. Pour cela, on introduit la notion de valeurs propres. ■

**Lemme 2 :** Rappelons que

$$K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de  $K$  sont  $\lambda_1 = \frac{2-3p-i\sqrt{3}}{2}$  et  $\lambda_2 = \frac{2-3p+i\sqrt{3}}{2}$

**Démonstration du lemme 2 :**

Soit  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dire que  $\lambda$  est une valeur propre de  $K$  signifie qu'il existe un couple  $x, y \in \mathbb{R}^2$  ( $x, y$ )  $\neq (0, 0)$  tel que

$$\boxed{K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

On cherche donc  $x, y$  et  $\lambda$  vérifiant l'équation ci-dessus.

On distribue :

$$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - px + py \\ -px + y - 2py \end{pmatrix}$$

Si  $x \neq 0$  et  $y \neq 0$ ; on a alors :

$$\frac{\lambda x}{x} = \frac{x - px + py}{x} \Leftrightarrow \lambda = 1 - p + \frac{py}{x}$$

$$\frac{\lambda y}{y} = \frac{-px + y - 2py}{y} \Leftrightarrow \lambda = 1 - 2p - \frac{px}{y}$$

On fixe la valeur  $s = \frac{x}{y}$  :

$$\begin{cases} \lambda = 1 - p + \frac{p}{s} \\ \lambda = 1 - 2p - ps \end{cases}$$

On a donc :

$$\boxed{\lambda: 1 - p + \frac{p}{s} = 1 - 2p - ps} \Leftrightarrow ps + p + \frac{p}{s} = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{ps^2 + ps + p = 0}$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = p^2 - 4p^2 = -3p^2 < 0$$

Le discriminant est négatif : les solutions ne sont pas réelles, mais complexes.

$$\Delta = -3p^2 = i^2 \sqrt{3}^2 p^2 = (i\sqrt{3}p)^2$$

On trouve :

$$s_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow s_1 = \frac{-p - i\sqrt{3}p}{2p} \Leftrightarrow s_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$$

$$s_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \Leftrightarrow s_1 = \frac{-p + i\sqrt{3}p}{2p} \Leftrightarrow s_1 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

On cherche à exprimer  $\lambda$  en fonction des valeurs de  $s$  :

$$\lambda_1 = 1 - p + \frac{p}{s_1} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p + \frac{p}{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p + \frac{2p}{-(1 + i\sqrt{3})} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p - \frac{2p}{(1 + i\sqrt{3})} \times \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p - \frac{2p(1 - i\sqrt{3})}{1^2 - i^2\sqrt{3}^2} \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p - \frac{2p(1 - i\sqrt{3})}{4}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = 1 - p - \frac{p(1 - i\sqrt{3})}{2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2 - 2p - (p(1 - i\sqrt{3}))}{2}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2}$$

$$\lambda_2 = 1 - p + \frac{p}{s_2} \Leftrightarrow \lambda_2 = 1 - p + \frac{p}{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{2 - 3p + i\sqrt{3}p}{2}$$

On exprime les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  :

$$\lambda_1: \quad \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2: \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{2 - 3p + i\sqrt{3}p}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

**Lemme 3 :**  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0 = 0$

**Démonstration du lemme 3:** Celle-ci repose sur le module des complexes  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  car

$$|\lambda_1|^n = \left| \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} \right|^n$$

$$|\lambda_1| = \left| \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} \right| = \frac{|2 - 3p - i\sqrt{3}p|}{|2|} = \frac{\sqrt{(2 - 3p)^2 + (\sqrt{3}p)^2}}{2}$$

$$|\lambda_1| = \frac{\sqrt{4 - 12p + 9p^2 + 3p^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 12p + 12p^2}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}}{2}$$

On calcule de même le module de  $\lambda_2$  :

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}$$

On note  $f(p) = 1 + 3p^2 - 3p$  et  $g(p) = \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}$



Nous allons encadrer  $g$  sur  $]0 ; 1[$ . Comme la fonction racine est croissante,  $g$  aura les mêmes variations que  $f$ .

Ici,  $f'(p) = 6p - 3$

### Tableau de variations

$p$	0	0,5	1
$f'(p)$	-		+
$g$	1	0,5	1

Donc lorsque  $p \in ]0 ; 1[$ , comme indiqué dans l'énoncé :  $|\lambda_i| \in ]0, 5 ; 1[$

D'après la propriété  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n = 0$  avec  $i = 1$  ou  $2$

**Lemme 4 :** Reprenons  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  les vecteurs propres de  $K$ . et  $\vec{w} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$

Il existe deux complexes  $(a_1, a_2)$  tels que

$$\vec{w} = a_1 \times \vec{u} + a_2 \times \vec{v}$$

#### Démonstration du lemme 4 :

L'égalité qu'on cherche à déterminer revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_0 = a_1 \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} + a_2 \frac{2 - 3p + i\sqrt{3}p}{2} \\ \tilde{\beta}_0 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système étant non nul, ce système admet une unique solution  $(a_1, a_2)$

#### Démonstration du théorème 5 :

Rappelons que nous cherchons à démontrer que,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Or,

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

La question revient donc à démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a vu que :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0 \\ \widetilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

A partir du lemme 4, nous avons vu que

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0 \\ \widetilde{\beta}_0 \end{pmatrix} = a_1 \times \vec{u} + a_2 \times \vec{v}$$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  étant les deux vecteurs propres de K

Par conséquent,

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \vec{w} = K^n (a_1 \times \vec{u} + a_2 \times \vec{v})$$

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = a_1 \times K^n \times \vec{u} + a_2 \times K^n \times \vec{v}$$

Or d'après la définition de valeurs propres (et par récurrence) :

$$K^n \times \vec{u} = \lambda_1^n \times \vec{u} \quad K^n \times \vec{v} = \lambda_2^n \times \vec{v}$$

Donc :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = a_1 \times \lambda_1^n \times \vec{u} + a_2 \times \lambda_2^n \times \vec{v}$$

Par le lemme 3,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0$

On a donc bien,

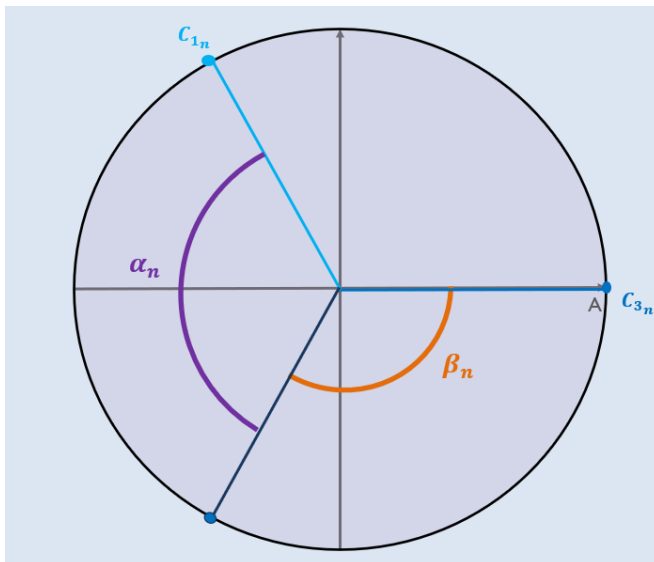
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit encore,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_n - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par somme de limites,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$



**Schéma 5** : position limite pour trois coureurs

On remarque que les coureurs tendent à arriver à cette position où on remarque qu'ils se répartissent sur le terrain de façon à ce qu'ils soient le plus éloignés possible les uns des autres.

#### 4. Conclusion

Ainsi, nous trouvons que lorsque les angles initiaux qui séparent deux coureurs sont non-nuls et que  $p \in ]0; 1[$  : les coureurs finissent par se séparer de  $\pi$  (soit  $180^\circ$ ) quand le stade est occupé par deux coureurs et que les coureurs se séparent finalement de  $\frac{2\pi}{3}$  (soit  $120^\circ$ ) quand le stade est occupé par trois coureurs :

2 coureurs :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$  avec  $\alpha_0 \neq 0$  et  $p \in ]0; 1[$

3 coureurs :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$  avec  $\alpha_0 \neq 0$  et  $\beta_0 \neq 0$  et  $p \in ]0; 1[$

On remarque donc que le terrain est divisé en deux pour deux coureurs et en trois pour trois coureurs, ce qui nous permet de conjecturer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{angles} = \frac{2\pi}{\text{nbre de coureurs}}$$

avec  $p \neq 0$  et  $p \neq 1$  et  $\text{angles initiaux} \neq 0$  (les angles correspondant aux angles qui séparent un coureur de celui devant lui)

Soit, les coureurs s'éloignent le plus possible les uns des autres et se partagent ainsi le stade.

Enfin, si  $p$  est égal à 0 ou 1, alors la répartition du terrain sera constante et conservera les angles initiaux.

On peut cependant soulever certaines questions sur la résolution du problème. En effet, on a par exemple calculé une limite lorsque  $n$  tend vers l'infini, ce qui signifie qu'on a calculé les angles lorsque les coureurs courent pour l'éternité sans jamais changer de vitesse (et ne montrant pas de signes de fatigue). On pourrait donc se demander à partir de combien de temps on se rapproche de la valeur de ces angles ou se demander s'il se possible de prendre en compte l'évolution de l'état physique des coureurs. Ou encore s'il serait possible de modéliser le terrain autrement.