

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Footing

Année 2022 – 2023

Romane Ferrandis, Lucie Correia, élèves de première générale

Établissement : Lycée Blaise Pascal, Orsay

Enseignantes : Hélène Cochard, Cécile Chipot

Chercheuse : Blandine Galiay, ENS Paris-Saclay

1. Présentation du sujet

Soit $p \in [0,1]$ et $M \in \mathbb{R}^*$.

Le stade municipal est occupé par des gens qui font leur footing. On suppose que le nombre de coureurs ne change pas au cours du temps. L'allure d'un coureur est influencée par le coureur le précédant, si bien qu'à chaque minute, chaque coureur a avancé de M mètres, plus p fois la distance qui le sépare du coureur devant lui. Peut-on prévoir la répartition des coureurs sur le terrain à long terme ?

Pour la suite de la résolution, nous négligeons M en considérant que cette variable n'a pas d'incidence sur la répartition du terrain car cette distance reste commune à tous les coureurs et nous choisissons de modéliser le terrain par un cercle trigonométrique.

On a donc, sur un stade municipal, des sportifs (C_i , avec i fixé) courant tel que :

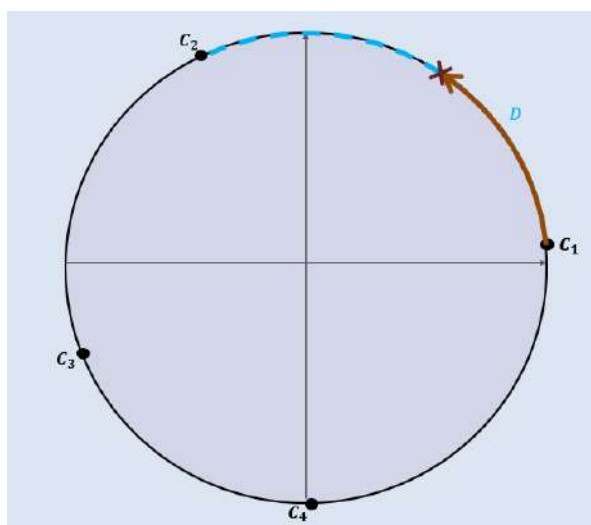


Schéma 1 : stade avec 4 coureurs où est représentée la distance parcourue par le coureur C_1 en une minute pour $p = 0,5$.

Légende :

- C_i : coureur i
- D : distance qui sépare le coureur 2 du coureur 1 à l'instant n
- : distance parcourue par le coureur 1 entre l'instant n et l'instant $n + 1$.

Si à l'instant n , la distance D sépare C_1 de C_2 , alors à l'instant $n + 1$, C_1 aura parcouru une distance $d = p \times D$ (avec $p \in [0, 1]$ fixé).

Nous remarquons que lorsque $p = 0$, lorsque $p = 1$, ainsi que lorsque les angles qui séparent deux

coureurs sont nuls (1), la répartition du terrain n'évolue pas (pour $p = 0$, les coureurs sont immobiles, et pour $p = 1$, les athlètes courent donc tous la même distance : la distance entre les coureurs n'évoluera donc pas au cours du temps) (2).

On fixe donc $p \in]0, 1[$.

2. Résultats

Nous avons conjecturé que les coureurs s'éloignent le plus possible les uns des autres au fil du temps, donc que les angles entre les coureurs tendent à s'approcher du périmètre du cercle (2π) divisé par le nombre de coureurs :

Avec **angles initiaux** $\neq 0$ (et pour $p \neq 0 \square\square p \neq 1$)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{angles} = \frac{2\pi}{\text{nbre de coureurs}}$$

Nous avons réussi à démontrer cette formule avec deux et trois coureurs, mais nous n'avons pas eu le temps de prouver la formule générale.

3. Résolution du problème

3.1. Étude pour deux coureurs

3.1.1. Les angles impliqués

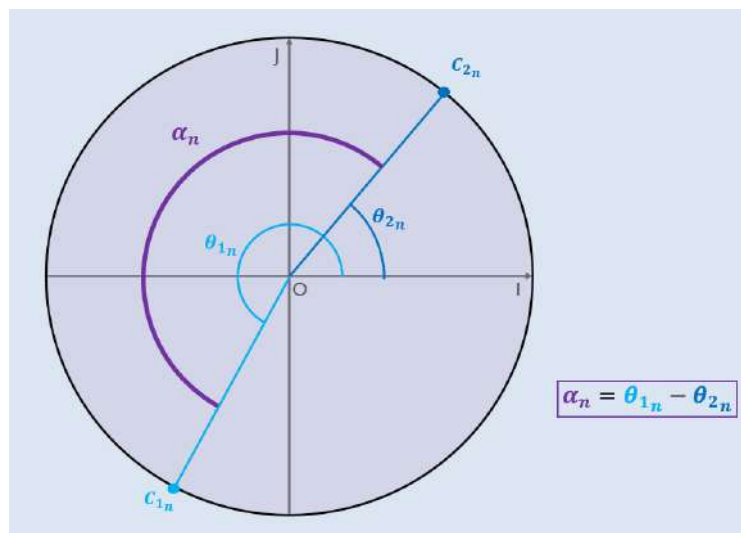


Schéma 2 : Stade avec deux coureurs angles associés
L'angle α_n sépare le coureur 1 du coureur 2 à l'instant n ($\alpha_0 \neq 0$).

3.1.2. Relation de récurrence

On pose : $\alpha_n = \theta_{1n} - \theta_{2n}$

α_n représente la distance qui sépare le coureur 1 du coureur 2. On cherche à trouver la relation de récurrence de la suite (α_n) .

Par définition, le coureur 1 avance de $p(2\pi - \alpha_n)$ et le coureur 2 de $p\alpha_n$.

$$\theta_{1n+1} = \theta_{1n} + p(2\pi - \alpha_n) \quad \text{et} \quad \theta_{2n+1} = \theta_{2n} + p\alpha_n$$

On a $\alpha_{n+1} = \theta_{1_{n+1}} - \theta_{2_{n+1}}$.

On obtient $\alpha_{n+1} = \alpha_n + 2p\pi - p\alpha_n - p\alpha_n$, soit

$$\boxed{\alpha_{n+1} = (-2p + 1)\alpha_n + 2p\pi}$$

On a donc trouvé une relation de récurrence sur la suite (α_n) . Celle-ci est arithmético-géométrique.

3.1.3. Étude de la limite de α_n et conclusion

Théorème 1 : Si (α_n) admet une limite l , alors $l = \pi$.

Démonstration :

Si (α_n) admet une limite l , alors l est une valeur fixe de la relation de récurrence :

$$\begin{aligned} l &= (-2p + 1)l + 2p\pi \\ \Leftrightarrow -2p\pi &= (-2p + 1)l - l \\ \Leftrightarrow -2p\pi &= (-2p + 1 - 1)l \\ \Leftrightarrow \boxed{l = \pi} \end{aligned}$$

Théorème 2 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$.

Démonstration :

On définit la suite (u_n) par $u_n = \alpha_n - \pi$. On a alors

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \alpha_{n+1} - \pi \\ &= (-2p + 1)\alpha_n + 2p\pi - \pi \\ &= (-2p + 1)\alpha_n + (2p - 1)\pi \\ &= -(2p - 1)(\alpha_n - \pi) \\ &= -(2p - 1)u_n \end{aligned}$$

Comme $p \in]0; 1[$, $(-2p + 1) \in]-1; 1[$. Par conséquent, la suite (u_n) converge vers 0, on a donc

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0} \text{ et par somme de limites } \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi}$$

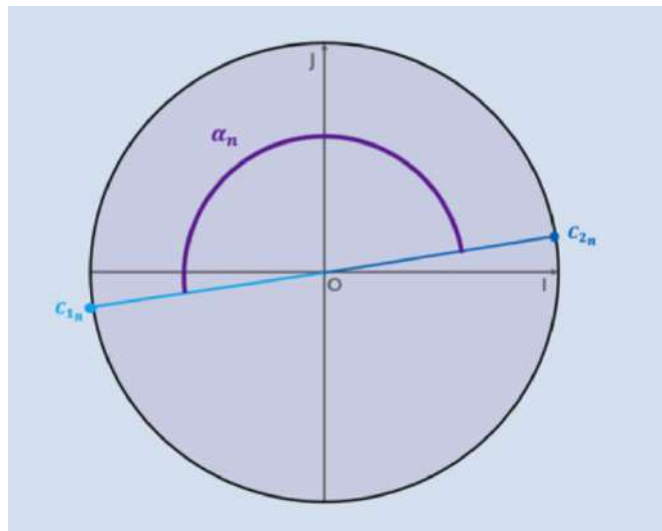


Schéma 3 : position limite pour deux coureurs

On remarque que les coureurs **tendent à s'éloigner le plus possible.**

3.2. Étude pour trois coureurs

3.2.1. Les angles impliqués et leurs relations

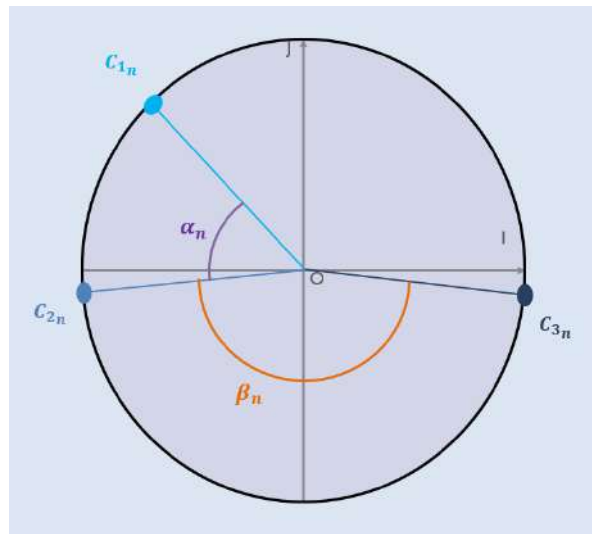


Schéma 4 : stade avec 3 coureurs, angles associés

On a donc les positions des coureurs 1, 2 et 3 à l'instant n auxquelles correspondent respectivement les angles θ_{1n} , θ_{2n} et θ_{3n} .

L'angle α_n est la différence entre θ_{2n} et θ_{1n} et l'angle β_n entre θ_{3n} et θ_{2n} .

$$\alpha_n = \theta_{2n} - \theta_{1n}$$

$$\beta_n = \theta_{3n} - \theta_{2n}$$

Théorème 3 : Relation de récurrence sur les suites (α_n) et (β_n)

$$\alpha_{n+1} = (1-p)\alpha_n + p\beta_n$$

$$\beta_{n+1} = -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi$$

Démonstration :

On a, par définition des avancées des coureurs,

$$\begin{cases} \theta_{1n+1} = \theta_{1n} + p\alpha_n & (1) \\ \theta_{2n+1} = \theta_{2n} + p\beta_n & (2) \\ \theta_{3n+1} = \theta_{3n} + p(2\pi - \alpha_n - \beta_n) & (3) \end{cases}$$

$$(2) - (1) : \quad \alpha_{n+1} = \theta_{2n} + p\beta_n - (\theta_{1n} + p\alpha_n) \quad (1)$$

$$(3) - (2) : \quad \beta_{n+1} = \theta_{3n} + p(2\pi - \alpha_n - \beta_n) - (\theta_{2n} + p\beta_n) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \alpha_{n+1} = \theta_{2n} + p\beta_n - \theta_{1n} - p\alpha_n \\ &= \alpha_n - p\alpha_n + p\beta_n \\ &= (1-p)\alpha_n + p\beta_n \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\alpha_{n+1} = (1-p)\alpha_n + p\beta_n}$$

$$\begin{aligned} (2) &\Leftrightarrow \beta_{n+1} = \theta_{3n} + 2p\pi - p\alpha_n - p\beta_n - \theta_{2n} - p\beta_n \\ &= \beta_n + 2p\pi - p\alpha_n - 2p\beta_n \\ &= 2p\pi - p\alpha_n + (1-2p)\beta_n \end{aligned}$$

Donc

$$\beta_{n+1} = -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi$$

On trouve donc la relation de récurrence sur les deux angles (quand $\alpha_0 \neq 0$ et $\beta_0 \neq 0$ et π).

3.2.2. Calcul de limites potentielles

Théorème 4 : Si (α_n) et (β_n) convergent alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{2\pi}{3}$$

Démonstration : en appelant α et β les limites alors celles-ci sont des valeurs pour lesquelles les suites n'évoluent pas :

$$\alpha = (1-p)\alpha + p\beta \quad (1)$$

$$\beta = -p\alpha + (1-2p)\beta + 2p\pi \quad (2)$$

$$(1) \quad -p\beta = (1-p)\alpha - \alpha \Leftrightarrow -p\beta = \alpha - p\alpha - \alpha \Leftrightarrow \beta = \alpha$$

$$(2) \quad 3p\alpha = 2p\pi \text{ ce qui équivaut à : } \alpha = \frac{2\pi}{3}$$

Donc

$$\alpha = \beta = \frac{2\pi}{3}$$

Nous devons maintenant démontrer que les deux suites convergent.

Théorème 5 :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \frac{2\pi}{3} \text{ et } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \frac{2\pi}{3}$$

3.2.3. Démonstration du théorème 5

Lemme 1 : Mise sous forme matricielle

On pose $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n - \frac{2\pi}{3}$; $\widetilde{\beta}_n = \beta_n - \frac{2\pi}{3}$

Ces suites sont définies par l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0 \\ \widetilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

Où K est la matrice donnée par $K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$.

Démonstration du lemme 1 :

Pour la démonstration, nous allons regrouper nos valeurs sous forme de matrice :

On pose $M_n = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1-p)\alpha_n + p\beta_n \\ -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n + 2p\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1-p)\alpha_n + p\beta_n \\ -p\alpha_n + (1-2p)\beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a donc

$$M_{n+1} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} M_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

On reconnaît une relation de récurrence d'une suite arithmético-géométrique.

Or, d'après le théorème 4, la suite constante $\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ est invariante pour la relation de récurrence.

On a donc

$$\begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix}$$

On soustrait :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2p\pi \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_{n+1} - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_n - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Comme $\widetilde{\alpha}_n = \alpha_n - \frac{2\pi}{3}$; $\widetilde{\beta}_n = \beta_n - \frac{2\pi}{3}$, la relation de récurrence sur ces suites est donc donnée par

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_{n+1} \\ \widetilde{\beta}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix}$$

En posant $K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$ et $\widetilde{M}_n = \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix}$, on a donc

$$\boxed{\widetilde{M}_{n+1} = K \widetilde{M}_n}$$

(\widetilde{M}_n) est une suite géométrique de raison K et donc :

$$\widetilde{M}_n = K^n \widetilde{M}_0 \Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_0 \\ \widetilde{\beta}_0 \end{pmatrix}}$$

■

On cherche maintenant à démontrer que cette suite matricielle converge vers 0. Pour cela, on introduit la notion de valeurs propres.

Définition :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Dire que λ est une valeur propre de K signifie qu'il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ avec $(x, y) \neq (0, 0)$ tel que

$$\boxed{K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est appelé vecteur propre associé à la valeur propre λ .

Lemme 2 : Rappelons que $K = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix}$.

Les valeurs propres de K sont $\lambda_1 = \frac{2-3p-i\sqrt{3}}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{2-3p+i\sqrt{3}}{2}$.

Les vecteurs propres associés sont $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$.

Démonstration du lemme 2 :

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Comme indiqué dans la définition, dire que λ est une valeur propre de K signifie qu'il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y) \neq (0, 0)$, tel que

$$\boxed{K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ -p & 1-2p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}} \quad (*)$$

On cherche donc x, y et λ vérifiant l'équation ci-dessus.

- Cherchons un vecteur propre sous la forme $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. L'équation (*) s'écrit alors

$$\begin{cases} (1-p)x = \lambda x & (1) \\ -px = 0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) conduit à $x = 0$. Or un vecteur propre correspond à un couple non trivial $(x, y) \neq (0, 0)$. On peut donc affirmer que tout vecteur propre vérifie $y \neq 0$

- Nous pouvons démontrer de la même manière qu'il n'existe aucun vecteur propre de la forme $\begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$; autrement dit $x \neq 0$
- Remarquons que pour tout vecteur propre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ alors pour tout réel t , $\begin{pmatrix} tx \\ ty \end{pmatrix}$ est encore un vecteur propre car le produit matriciel $K \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est linéaire en x et y . Cela revient à dire que les vecteurs solutions sont colinéaires. Comme x et y sont non nuls, la question se ramène donc à chercher le rapport $s = \frac{x}{y}$.
- Cherchons les valeurs propres de K .

Reprenons l'équation (*) sous forme développée :

$$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - px + py \\ -px + y - 2py \end{pmatrix}$$

Comme $x \neq 0$ et $y \neq 0$; on a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\lambda x}{x} &= \frac{x - px + py}{x} \Leftrightarrow \lambda = 1 - p + \frac{py}{x} \\ \frac{\lambda y}{y} &= \frac{-px + y - 2py}{y} \Leftrightarrow \lambda = 1 - 2p - \frac{px}{y} \end{aligned}$$

On fixe la valeur $s = \frac{x}{y}$:

$$\begin{cases} \lambda = 1 - p + \frac{p}{s} \\ \lambda = 1 - 2p - ps \end{cases}$$

On a donc, en égalisant,

$$\boxed{1 - p + \frac{p}{s} = 1 - 2p - ps} \Leftrightarrow ps + p + \frac{p}{s} = 0 \Leftrightarrow \boxed{ps^2 + ps + p = 0}$$

On calcule le discriminant :

$$\Delta = p^2 - 4p^2 = -3p^2 < 0$$

Le discriminant est négatif : les solutions ne sont pas réelles, mais complexes.

$$\Delta = -3p^2 = i^2 \sqrt{3}^2 p^2 = (i\sqrt{3} p)^2$$

On trouve

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-p - i\sqrt{3}p}{2p} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ s_2 &= \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-p + i\sqrt{3}p}{2p} = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

On cherche à exprimer λ en fonction des valeurs de s :

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - p + \frac{p}{s_1} = 1 - p + \frac{p}{\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}} \\ &= 1 - p + \frac{2p}{-(1 + i\sqrt{3})} = 1 - p - \frac{2p}{(1 + i\sqrt{3})} \times \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 - i\sqrt{3}} \\ &= 1 - p - \frac{2p(1 - i\sqrt{3})}{1^2 - i^2\sqrt{3}^2} = 1 - p - \frac{2p(1 - i\sqrt{3})}{4} \\ &= 1 - p - \frac{p(1 - i\sqrt{3})}{2} = \frac{2 - 2p - (p(1 - i\sqrt{3}))}{2} \\ &\quad \boxed{\lambda_1 = \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2}}\end{aligned}$$

$$\lambda_2 = 1 - p + \frac{p}{s_2} = 1 - p + \frac{p}{\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}}$$

d'où

$$\boxed{\lambda_2 = \frac{2 - 3p + i\sqrt{3}p}{2}}$$

- Cherchons maintenant les deux vecteurs propres associés à λ_1 et λ_2

- Nous avons vu que la valeur propre λ_1 correspond à $s_1 = \frac{x}{y} = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$

Comme nous cherchons un vecteur représentant la direction correspondante, on peut choisir $y = 1$. Nous obtenons ainsi le vecteur

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

- De même le vecteur propre associé à λ_2 est :

$$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lemme 3 : $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0$

Démonstration du lemme 3 : Celle-ci repose sur le module des complexes λ_1 et λ_2 car

$$\begin{aligned}|\lambda_1|^n &= \left| \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} \right|^n \\ |\lambda_1| &= \left| \frac{2 - 3p - i\sqrt{3}p}{2} \right| = \frac{|2 - 3p - i\sqrt{3}p|}{|2|} = \frac{\sqrt{(2 - 3p)^2 + (\sqrt{3}p)^2}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{4 - 12p + 9p^2 + 3p^2}}{2} = \frac{\sqrt{4 - 12p + 12p^2}}{2} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}}{2}\end{aligned}$$

On calcule de même le module de λ_2 :

$$\boxed{|\lambda_1| = |\lambda_2| = \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}}$$

On note $f(p) = 1 + 3p^2 - 3p$ et $g(p) = \sqrt{1 + 3p^2 - 3p}$.

Nous allons encadrer g sur $]0; 1[$. Comme la fonction racine est croissante, g aura les mêmes variations que f . Ici, $f'(p) = 6p - 3$.

Tableau de variations

p	0	0,5	1
$f'(p)$		0	
g	1	0,5	1

Donc lorsque $p \in]0; 1[$, comme indiqué dans l'énoncé, $|\lambda_i| \in]0, 5; 1[$.

Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_i^n = 0$ avec $i = 1$ ou 2 .

Lemme 4 : Reprenons \vec{u}_1 et \vec{u}_2 les vecteurs propres de K , et $\vec{w} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$.

Il existe deux complexes (a_1, a_2) tels que

$$\vec{w} = a_1 \times \vec{u}_1 + a_2 \times \vec{u}_2$$

Démonstration du lemme 4 :

L'égalité qu'on cherche à déterminer revient à résoudre le système

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_0 = a_1 \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} + a_2 \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \\ \tilde{\beta}_0 = a_1 + a_2 \end{cases}$$

Le déterminant de ce système étant non nul, ce système admet une unique solution (a_1, a_2)

Démonstration du théorème 5 :

Rappelons que nous cherchons à démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

Or

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$$

La question revient donc à démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On a vu que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_n \\ \tilde{\beta}_n \end{pmatrix} = K^n \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix}$$

À partir du lemme 4, nous avons vu que

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha}_0 \\ \tilde{\beta}_0 \end{pmatrix} = a_1 \times \vec{u}_1 + a_2 \times \vec{u}_2$$

\vec{u}_1 et \vec{u}_2 étant les deux vecteurs propres de K .

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} &= K^n \vec{w} = K^n (\mathbf{a}_1 \times \vec{u}_1 + \mathbf{a}_2 \times \vec{u}_2) \\ &= \mathbf{a}_1 \times K^n \times \vec{u}_1 + \mathbf{a}_2 \times K^n \times \vec{u}_2 \end{aligned}$$

Or d'après la définition de valeurs propres (et par récurrence)

$$K^n \times \vec{u}_1 = \lambda_1^n \times \vec{u}_1 \quad K^n \times \vec{u}_2 = \lambda_2^n \times \vec{u}_2$$

Donc

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \mathbf{a}_1 \times \lambda_1^n \times \vec{u}_1 + \mathbf{a}_2 \times \lambda_2^n \times \vec{u}_2$$

Par le lemme 3, $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_2^n = 0$. On a donc bien

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \widetilde{\alpha}_n \\ \widetilde{\beta}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n - \frac{2\pi}{3} \\ \beta_n - \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par somme de limites,

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}}$$

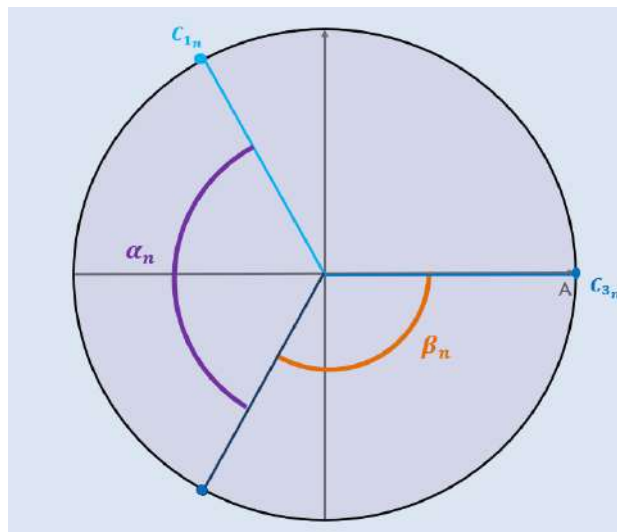


Schéma 5 : position limite pour trois coureurs

On remarque que les coureurs tendent à arriver à cette position où on remarque qu'ils se répartissent sur le terrain de façon à ce qu'ils soient le plus éloignés possible les uns des autres.

4. Conclusion

Ainsi, nous trouvons que lorsque les angles initiaux qui séparent deux coureurs sont non-nuls et que $p \in]0; 1[$: les coureurs finissent par se séparer de π (soit 180°) quand le stade est occupé par deux coureurs et que les coureurs se séparent finalement de $\frac{2\pi}{3}$ (soit 120°) quand le stade est occupé par trois coureurs :

2 coureurs : $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \pi$ avec $\alpha_0 \neq 0$ et $p \in]0; 1[$.

3 coureurs : $\lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\pi}{3} \\ \frac{2\pi}{3} \end{pmatrix}$ avec $\alpha_0 \neq 0$ et $\beta_0 \neq 0$ et $p \in]0; 1[$.

On remarque donc que le terrain est divisé en deux pour deux coureurs et en trois pour trois coureurs, ce qui nous permet de conjecturer :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{angles} = \frac{2\pi}{\text{nbre de coureurs}}$$

avec $p \neq 0$ et $p \neq 1$ et **angles initiaux** $\neq 0$ (les angles correspondant aux angles qui séparent un coureur de celui devant lui).

Soit, les coureurs s'éloignent le plus possible les uns des autres et se partagent ainsi le stade.

Enfin, si \square est égal à 0 ou 1, alors la répartition du terrain sera constante et conservera les angles initiaux.

On peut cependant soulever certaines questions sur la résolution du problème. En effet, on a par exemple calculé une limite lorsque n tend vers l'infini, ce qui signifie qu'on a calculé les angles lorsque les coureurs courent pour l'éternité sans jamais changer de vitesse (et ne montrant pas de signes de fatigue). On pourrait donc se demander à partir de combien de temps on se rapproche de la valeur de ces angles ou se demander s'il serait possible de prendre en compte l'évolution de l'état physique des coureurs. Ou encore s'il serait possible de modéliser le terrain autrement.

Notes d'édition

[1] On peut aussi exclure le cas où les angles qui séparent les coureurs sont égaux à π .

[2] Pour $p = 1$ chaque coureur prend la place du coureur qui est devant lui.