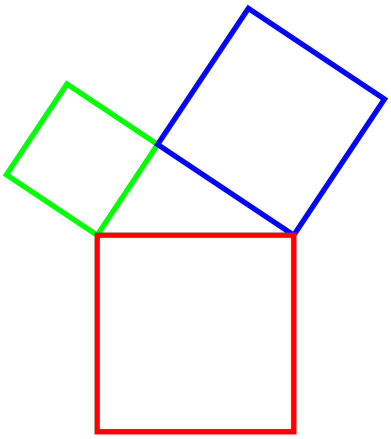
LE THÉORÈME DE L'HYPOTÉNUSE, dit de PYTHAGORE.

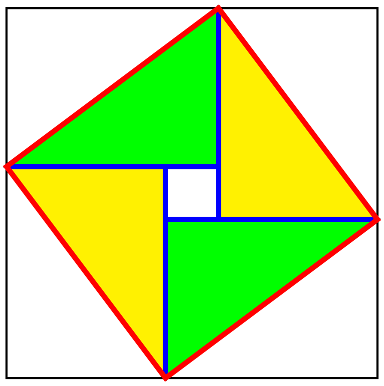
0. À partir d'un triangle rectangle, on construit vers son extérieur un carré sur chacun de ses côtés. Alors, l'aire du carré de l'hypoténuse est égale à la somme des aires des deux petits carrés. C'est le théorème de Pythagore (environ $-560, -480$). Quinze exemples avec les trois aires entières figurent déjà sur des tablettes babyloniennes plus de 1000 ans avant (tablette Plimpton 322).



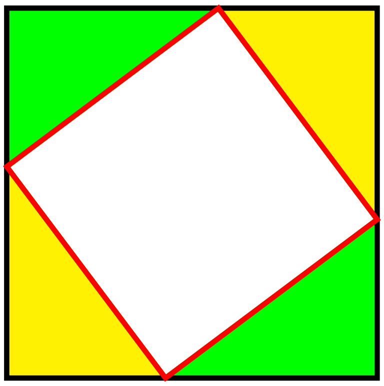
À la Cité des Sciences et de l'Industrie du parc de la Villette, à Paris, les trois carrés servent de réservoirs qui communiquent par leurs points de contact ; ils sont placés verticalement, celui de l'hypoténuse étant plein d'eau, les deux autres vides. L'assemblage pivote autour d'un axe horizontal. Au bout d'un demi-tour, le réservoir de l'hypoténuse se sera entièrement déversé dans les deux autres, qui sont alors pleins.

On note a, b, c les longueurs des côtés du triangle rectangle : c pour l'hypoténuse, a, b, $a \geq b$ pour les deux autres côtés. Les aires des carrés associés sont c^2, a^2, b^2. Le théorème dit : $c^2 = a^2 + b^2$. En fait, ceci est un critère pour que le triangle de côtés a, b, c soit rectangle, d'hypoténuse c.

1. Démonstrations par des identités algébriques. Chine ancienne ("Le gnomon des Zhou", Dynastie Han, vers -100).

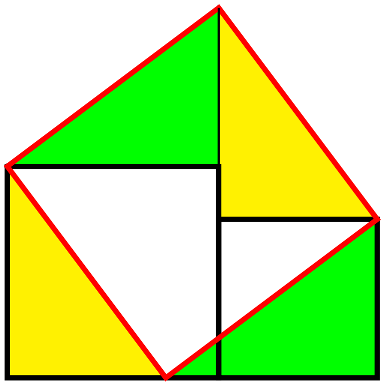


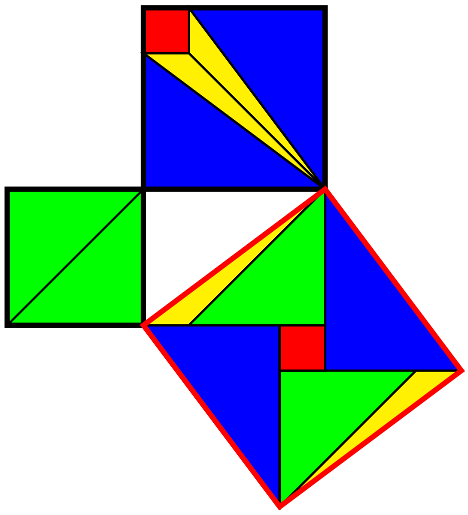
$c^2 = (a-b)^2 + 4\frac{ab}{2}$



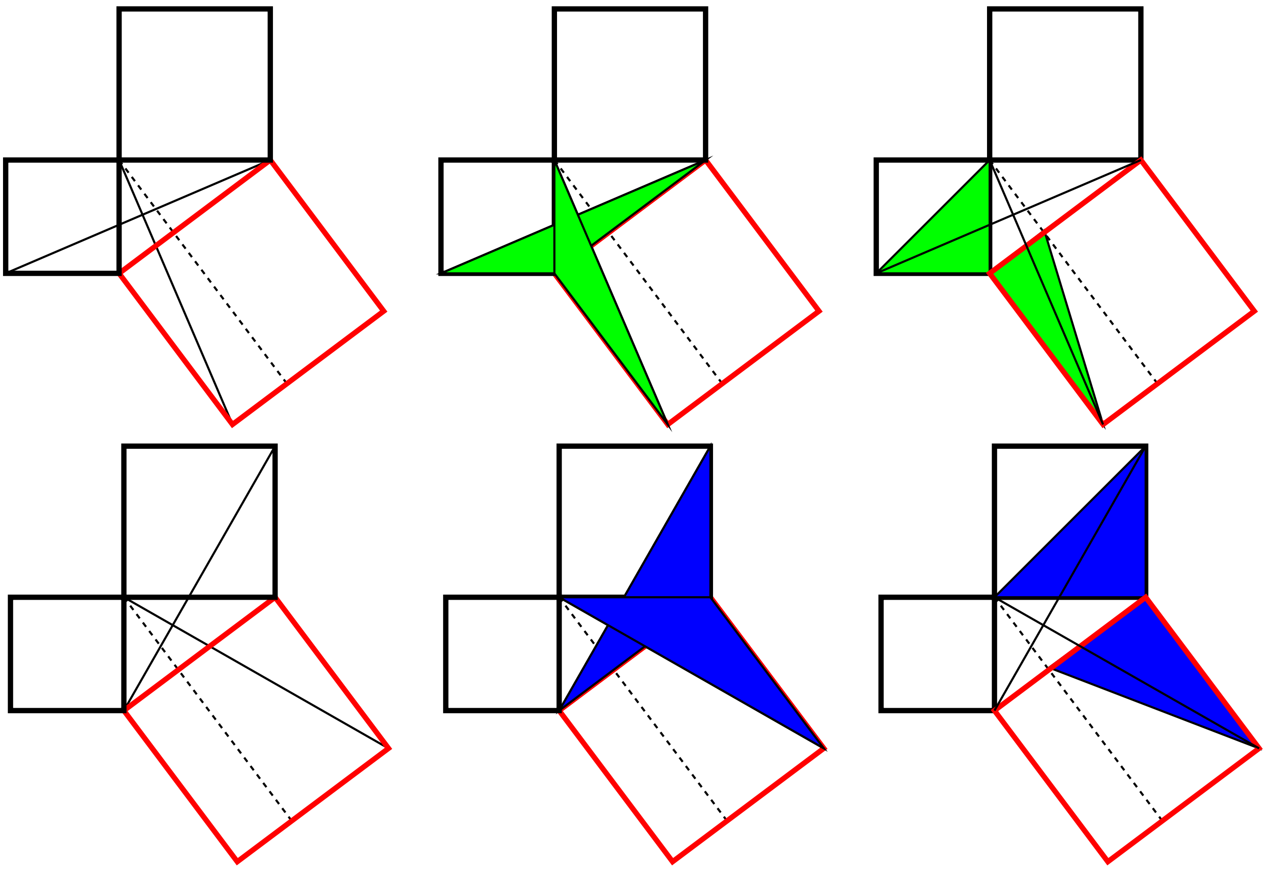
$(a+b)^2 = c^2 + 4\frac{ab}{2}$

2. Démonstration par découpages : ”Le palanquin de la mariée” (qui n’utilise que des translations), et Liu Hui (Chine, 3ème siècle) :

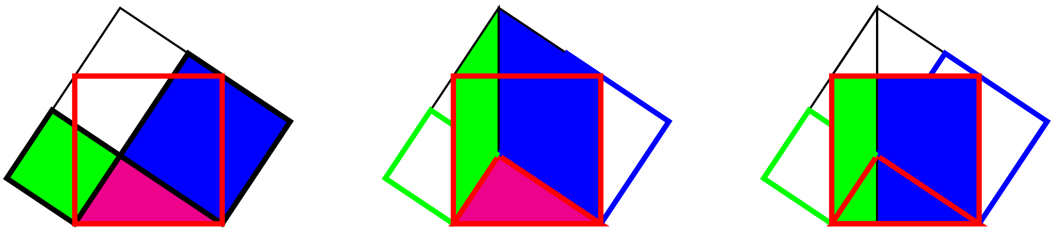




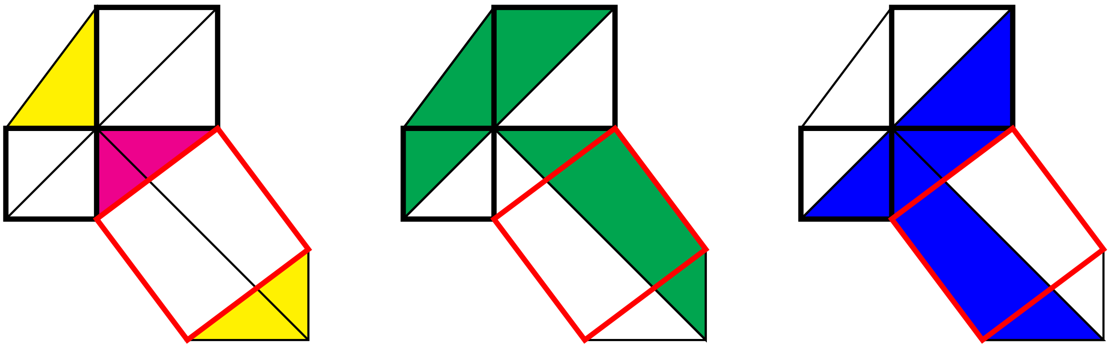
3. Démonstration d’Euclide (Grèce, env.−300.) : par congruence de triangles et glissements (Proposition 47 du Livre I des Éléments).



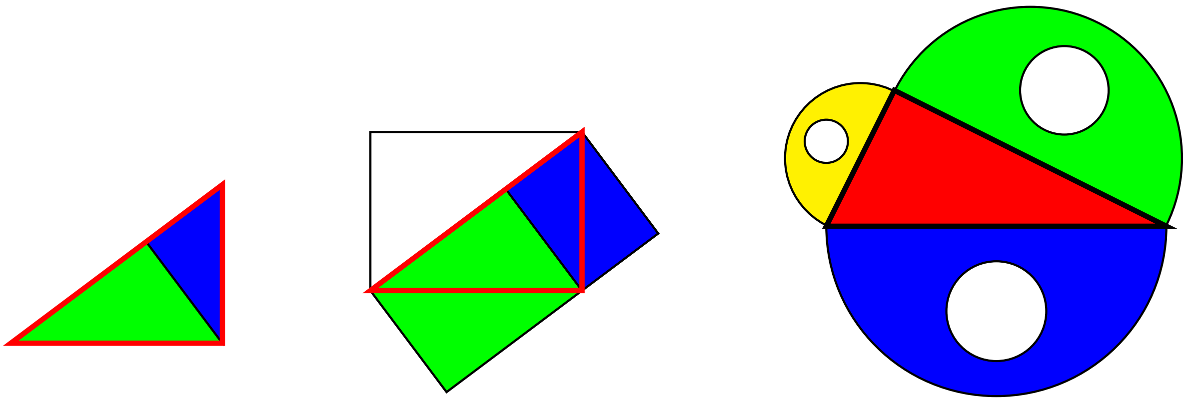
4. Démonstration affine : Pappus (Égypte, 3ème siècle), par glissements de parallélogrammes parallèlement à un côté. Le théorème de Pythagore est la version euclidienne d'un énoncé affine : lors d'une translation dans le plan affine, la somme des aires algébriques balayées par les trois côtés d'un triangle est nulle. On peut déceler le "palanquin de la mariée" dans ces figures.



5. Démonstration dite de Léonard de Vinci (Italie, 1452-1519) : ajout de deux copies au triangle rectangle et congruences de quadrilatères.



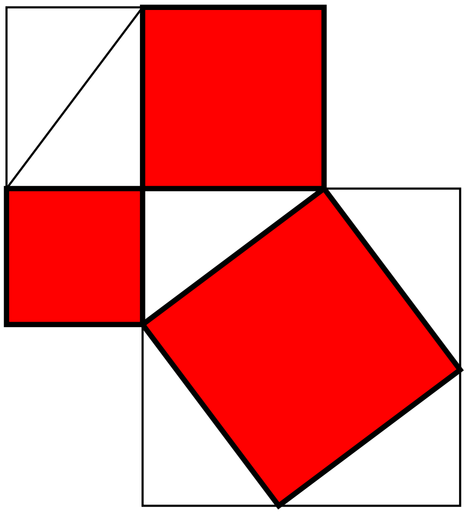
6. Démonstration par similitudes de triangles : Euclide, Éléments Prop. 31 du livre VI.



Sur la figure de gauche, la hauteur du triangle rectangle détermine deux triangles rectangles qui lui sont semblables (Euclide VI.8). Leurs longueurs sont $(a^2/c, ab/c, a), (ab/c, b^2/c, b)$. L'aire $ab/2$ du triangle rectangle initial est la somme des aires des deux autres, ce que dit $c^2 = a^2 + b^2$. La figure du centre est une autre version : on ajoute au triangle rectangle découpé selon sa hauteur les trois symétriques des trois triangles ainsi définis, symétriques que l'on obtient par les symétries centrales relatives aux milieux de ses côtés : les deux grands rectangles qui apparaissent ont la même aire. À droite, on a construit des figures semblables sur les côlés : la somme des aires sur celles des côtés de l'angle droit est égale à celle sur l'hypoténuse.

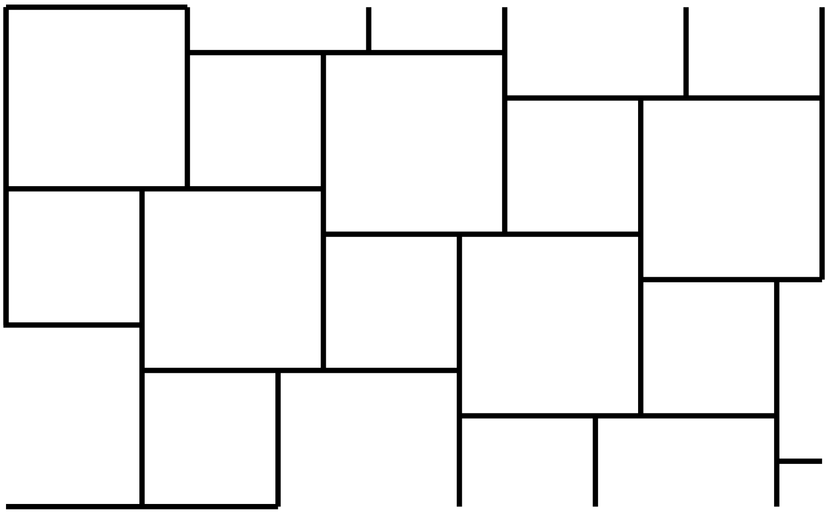
8. Démonstration par complémentation (cf Thabit ibn Qurra, 836-901, période Abbasside).

On ajoute cinq copies du triangle rectangle à la figure de base, pour former une figure symétrique par rapport au milieu de l'hypoténuse du triangle rectangle initial : les figures de part et d'autre cette hypoténuse sont égales, et leur ôter à chacune trois copies du triangle rectangle laisse d'une part le carré de l'hypoténuse, d'autre part la réunion des deux carrés des deux autres côtés. Voir aussi celle présentée au 5.



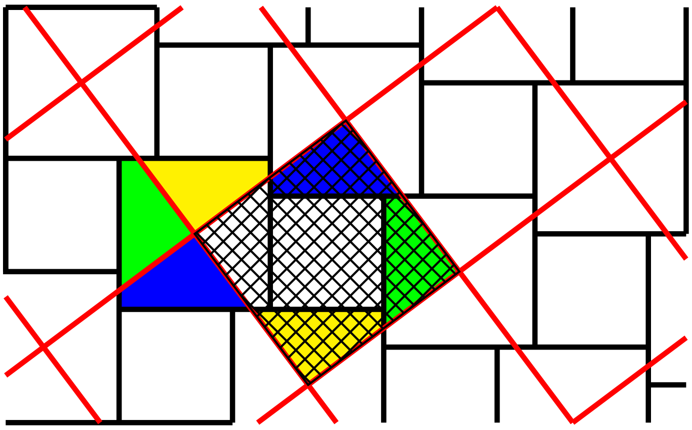
9. Démonstration par pavages (Thabit ibn Qurra, 836-901, période Abbasside ; cf aussi tombe de Henry Perigal, Angleterre 1801-1898.)

À partir du triangle rectangle donné, on définit un pavage du plan : les deux carrés construits sur les côtés de l'angle droit sont mis côte à côte sur une même base. La réunion de ces deux carrés constitue la maille (pavé fondamental) d'un pavage du plan. Les translations qui conservent ce pavage forment un réseau engendré par deux vecteurs orthogonaux de longueur celle de l'hypoténuse.

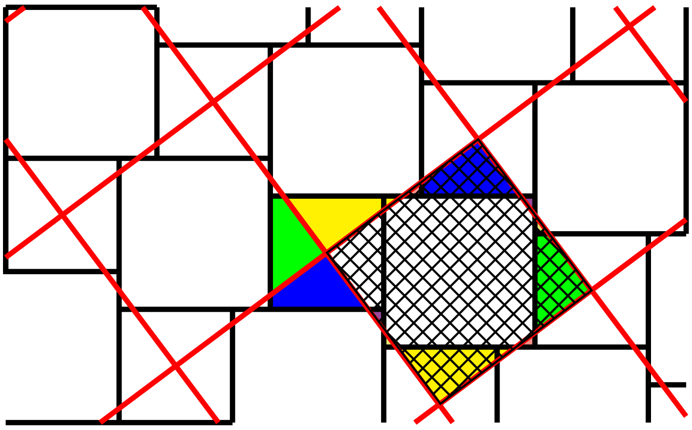


Chaque façon de superposer le pavage ci-dessus par le quadrillage des hypoténuses provoque un découpage du pavage initial. Dans les deux premiers exemples ci-dessous, le carré grillagé est obtenu à partir du découpage des deux carrés initiaux.

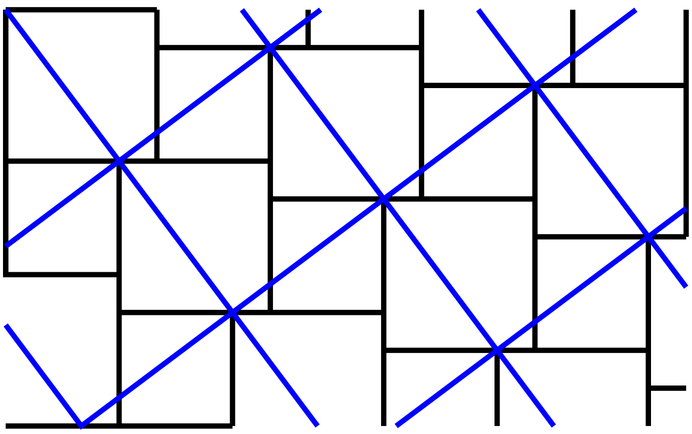
Lorsque le quadrillage par les carrés de l'hypoténuse est construit à partir des centres des carrés moyens, on obtient (Perigal) :



Le quadrillage par les carrés de l'hypoténuse est construit à partir des centres des petits carrés :

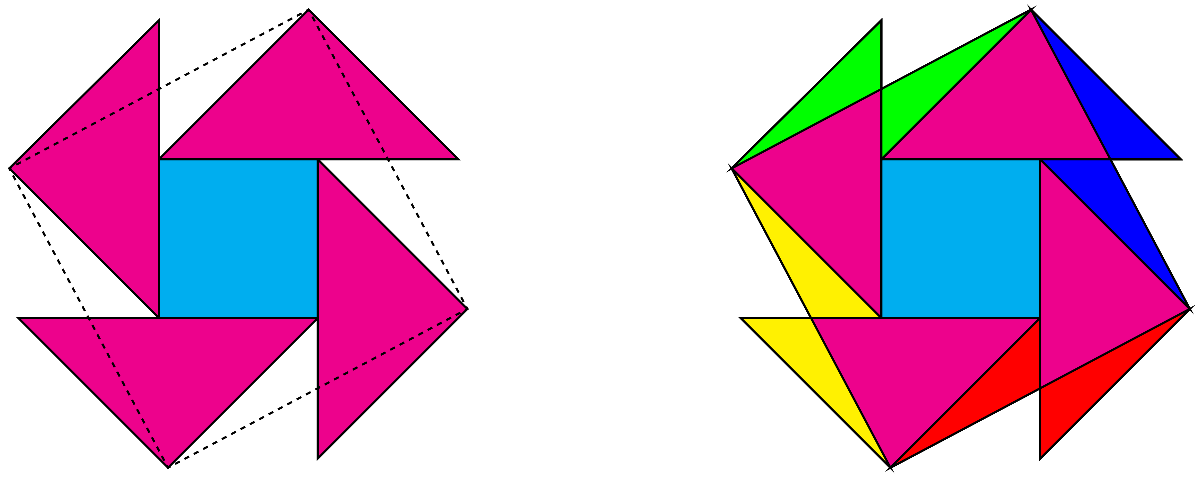


On retrouve le "palanquin de la mariée" en prenant une superposition convenable des deux pavages :

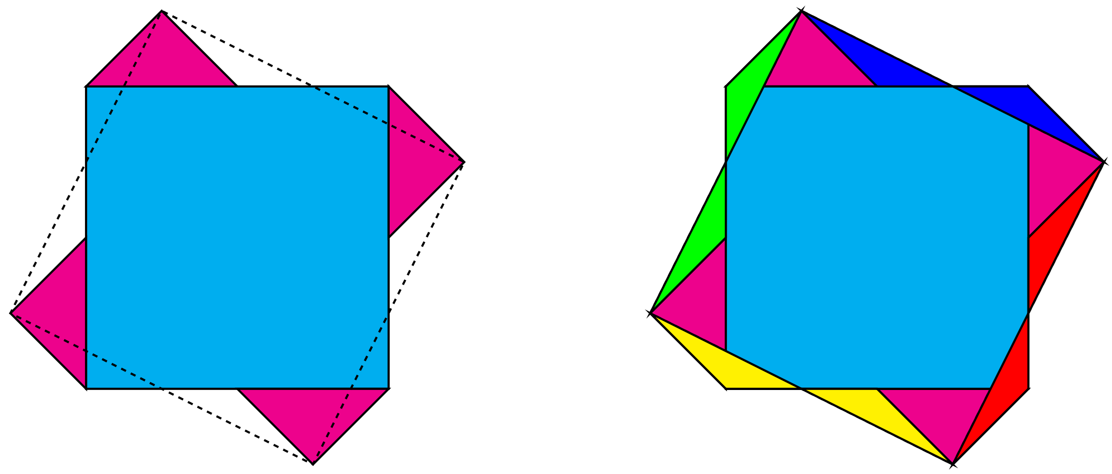


10. Une autre démonstration par découpage (cf. Abu'l-Wafa, 940-998, période Abbasside).

On découpe l'un des carrés autre que celui de l'hypoténuse suivant les diagonales, ce qui donne quatre triangles rectangles isocèles égaux, dont les hypoténuses sontt les côtés du carré choisi. On les dispose autour de l'autre carré de façon invariante par rotations d'un quart de tour comme indiqué ci-dessous. Les quatre sommets des angles droits des triangles isocèls forment un carré, de longueur du côté égal à la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle initial. On découpe alors les quatre triangles qui dépassent de ce carré, que l'on replace tous à l'intérieur par symétries centrales : avec le carré central initial, le carré de l'hypoténuse est totalement reconstitué.



Les deux figures ci-dessus sont construites à partir du carré sur le petit côté de l'angle droit. Les figures ci-dessous sont construites à partir du carré sur le grand côté de l'angle droit. À gauche, figure en pointillé le carré de l'hypoténuse.

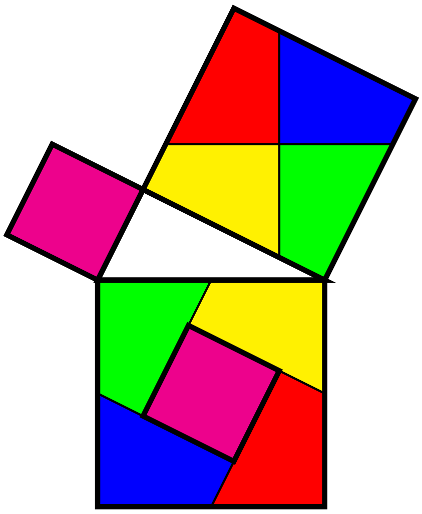


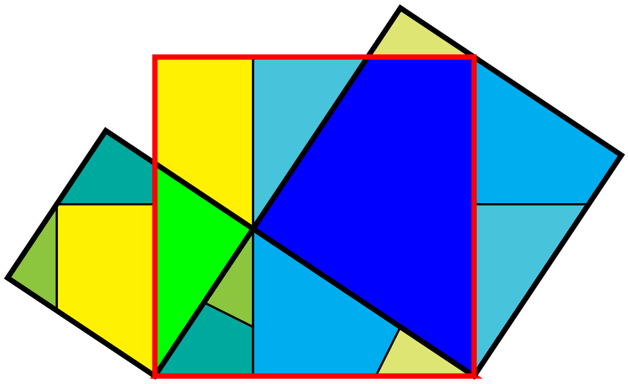
11. Quelques autres découpages.

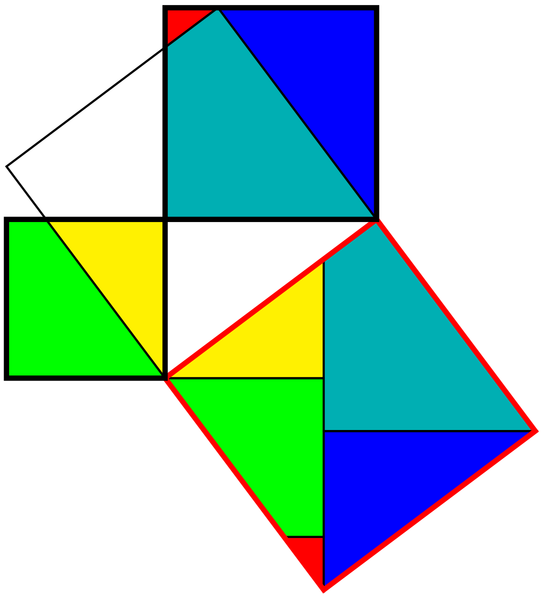
Le premier découpage vient du premier exemple de pavage ci-dessus (Perigal) ; les polygones sont d/’eplacés par translations.

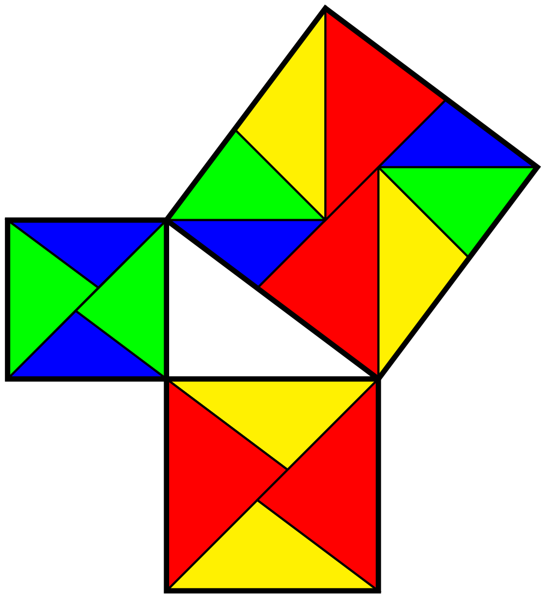
Le second reprend la figure de la démonstration de Pappus, ici dans le cas où les longueurs des côtés du triangle rectangle sont voisines ; dans ce cas aussi, les translations suffisent.

Les deux derniers découpages utilisent des translations, des symétries centrales, et des rotations d’un quart de tour.









12. Références.

Quelques livres :

R. Creighton Buck. Sherlock Holmes in Babylon. Amer. Math. Monthly 87 (1980), 335-345.

Jran Fribert. Methods and traditions of Babylonian Mathematics I: Plimpton 322, Pythagorean triples, and the Babylonian triangle parameter equations. Historia Math. 8 (1981), 277-318.

K. Chemla et Guo Shuchun, *Les neuf chapitres. Le classique mathématique de la Chine ancienne et ses commentaires.* Dunod, 2004.

Euclide, *Les éléments.* Texte grec et traduction française libre par Georges Kayas. Éd. CNRS, 1978.

B.L. van der Waerden, *Geometry and Algebra in Ancient Civilizations.* Springer Verlag, 1983.

Présentation et discussion (en anglais) des propositions citées des Éléments d'Euclide :

http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/bookI/propI47.html

http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/bookI/propI48.html

http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/bookVI/propVI8.html

http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/bookVI/propVI31.html

http://aleph0.clarku.edu/∼djoyce/java/elements/bookVI/propVI8.html

Autres références Internet sur le théorème de Pythagore :

http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/index.shtml

http://www.mathematische-basteleien.de/formula.htm

http://digilander.libero.it/basecinque/pitagora/perigalpit.htm

http://plus.maths.org/issue16/features/perigal/index.html