

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Les Graphes

Année 2018-2019

PARIS ;17ème arrondissement
34 rue Georges Picquart

Élève de 5^{ème} du collège La Rose
Blanche

*DAVID Zacharie, NICOLAS Léonore,
PIERRET Lola et SOMMER Romane*

Professeur : *Mme GRANIER*
Chercheur : *M. TABOUY*
(Agroparsitech)

Introduction

Dans ce problème nous allons introduire la notion de GRAPHERS qui vient de la théorie éponyme. Vous avez sans doute déjà eu à faire à des graphes dans votre vie : la carte des métros de Paris, votre arbre généalogique etc... Nous verrons que des objets simples peuvent aider à résoudre des problèmes difficiles en apparence

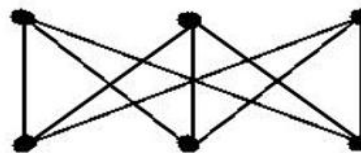
Quelques définitions

Définition d'un graphe : Un graphe est un ensemble de points nommés sommets reliés par des segments appelés arêtes. L'ensemble des arêtes entre sommets forme une figure similaire à un réseau.

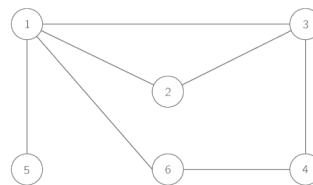
Caractéristiques des graphes : les graphes peuvent être planaires ou non planaires. (1) Ils peuvent aussi être orientés ou non orientés.

Exemples

Graphe non planaire

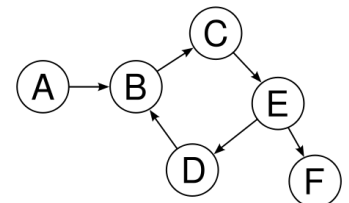
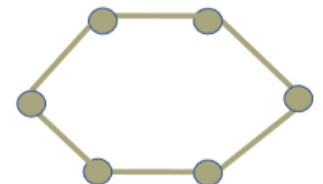


(2)



graphe non orienté

Graphe planaire



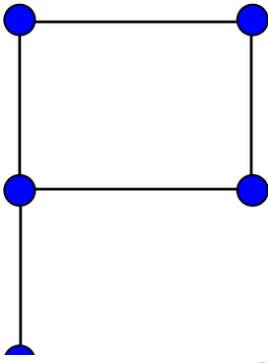
graphe orienté

Lemme de poignées de main

Ce problème consiste à trouver le lien entre le nombre d'arêtes et le nombre de degrés. (3) Les débuts de nos recherches étaient consacrés à la représentation des graphes. Nous avons dessiné plusieurs graphes afin d'observer les résultats sur le lien entre les arêtes et les degrés. Finalement, nous avons trouvé que le nombre de

degrés est le double du nombre d'arêtes.

Exemple :



Nombre d'arêtes : 5
Nombre de degrés : 10

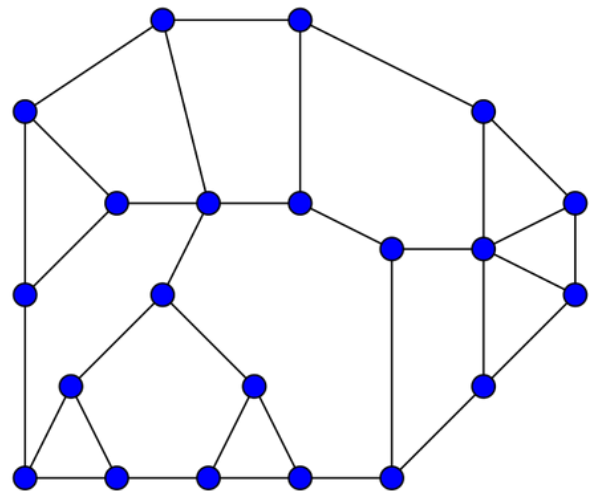
Théorème d'Euler-Descartes

Nous avons effectué des recherches en appliquant le théorème sur plusieurs graphes. Par rapport à ces graphes, nous avons fait un tableau : 3 premières colonnes avec le nombre d'arêtes, le nombre de sommets et le nombre de faces (4) de chaque graphe, puis les 3 dernières colonnes avec le calcul $\text{sommet} + \text{faces} = \text{arêtes} - 2$ et résultats = arêtes.

Ces trois dernières colonnes, nous les avons trouvées grâce à nos recherches. Nous avons ensuite appliqué ce théorème à plusieurs graphes planaires, pour vérifier le théorème que nous avons trouvé. En observant sur les

exemples, notre théorème fonctionnait nous avons donc conclu qu'il fonctionnait pour tous les graphes planaires.

Exemple :



Nombre d'arêtes : 32
Nombre de sommets : 21
Nombre de faces : 13
 $\text{Sommet} + \text{faces} = \text{arêtes} - 2$
 $21 + 13 - 2 = 32$ (5)

Théorème des quatre couleurs

Pour commencer nous avons recherché le nombre de couleurs maximum (6) nécessaire pour colorier une carte en optimisant les couleurs. Par déduction (avec le titre du théorème que l'on nous avait donné), nous avons trouvé le nombre quatre. Nous avons ensuite cherché à vérifier ce théorème en le pratiquant sur plusieurs cartes du monde, de la France, de l'Europe ...

En observant les cartes, nous avons conclu que le théorème fonctionne avec toutes les cartes mais nous n'avons pas réussi à le démontrer.

Exemple :



Pour colorier avec le moins de couleurs la carte de France nous avons d'abord colorié avec une couleur. Mais cela était impossible sauf si, il n'y avait qu'une région sur la carte. Puis nous avons colorié avec 2 couleurs cela fonctionnait pour certaines cartes, mais pas pour toutes. Nous avons également colorié les cartes avec 3 couleurs (pas possible pour la totalité des cartes car certaines ne fonctionnaient pas). Enfin pour 4 couleurs toutes les cartes que nous avons essayées fonctionnaient.

Notes d'édition

(1) Un **graphe** planaire est un graphe qui a la particularité de pouvoir se représenter sur un **plan** sans qu'aucune arête n'en croise une autre.

(2) Cette image n'est pas très lisible ; il faut se l'imaginer en 3 dimensions.

(3) Le **degré** d'un sommet est égal au nombre d'arêtes qui le relient aux autres sommets.

(4) La face d'un graphe est une région maximale du plan délimitée par un ensemble d'arêtes et qui n'en contient aucune.

(5) Le nombre d'arêtes n'est pas 32 dans cette figure mais 33. L'erreur vient du fait que la face externe du graphe n'a pas été comptée. En réalité pour cet exemple : le nombre de sommets est 21, le nombre de faces est 14 et non 13, et le nombre d'arêtes est 33 et non 32.

(6) Il s'agit plutôt du nombre minimum de couleurs pour colorier n'importe quelle carte.