CONGRES MATh.en.JEANS 2008

Etablissements: Collège des Eyquems, Mérignac, 33700

Lycée Alfred Kastler, Talence, 33400

Titre du sujet: Happy Numbers…et «autres rondes»

Présentation du sujet:

Nous étudions les nombres entiers en additionnant leurs chiffres, puis les carrés de leurs chiffres, puis les cubes de leurs chiffres…et nous…entrons dans la ronde!!

Venez danser avec nous!

Collège les Eyquems:

Alexandre Lahens, Julie Bey, Claire Danloux, Cécile Dulaurans,

Thomas Elcrin, Claire Goujard, Pauline Laffont,

Corentin Lafitte, Océane Rousseau, Paul Turbet-Delof

Lycée A. Kastler:

Jérémie Bergognat, Damien Chaussonnet, Marion Decoupigny

avec les propositions, la participation, les conseils, les commentaires, le soutien

de ***Monsieur Pierre Mounoud****, mathématicien, chercheur à l'Institut Mathématique de Bordeaux, université Bordeaux1*

Happy numbers
et
autres rondes

Soit N un nombre entier naturel NON NUL

T1(N) : la somme des chiffres du nombre N.

T2(N) : la somme des carrés des chiffres du nombre N.

T3(N) : la somme des cubes des chiffres du nombre N.

Pour T1 :

Exemple: T1(16)=1+6 = 7
T1(7)=7

On notera T1 : 16→7→7 …

stationnement à 7, et on écrit CS(16) = 7
CS(N) est le Chiffre de Stationnement de N

Observations:

nous avons observé... qu'il y avait des « tranches » de 9 :

T1(1)=1	T1(19)=1
T1(2)=2	T1(20)=2
T1(3)=3	T1(21)=3
T1(4)=4	T1(22)=4
T1(5)=5	T1(23)=5
T1(6)=6	T1(24)=6
T1(7)=7	T1(25)=7
T1(8)=8	T1(26)=8
T1(9)=9	T1(27)=9
T1(10)=1	T1(28)=1
T1(11)=2	T1(29)=2
T1(12)=3	T1(30)=3
T1(13)=4	T1(31)=4
T1(14)=5	T1(32)=5
T1(15)=6	T1(33)=6
T1(16)=7	T1(34)=7
T1(17)=8	T1(35)=8
T1(18)=9	T1(36)=9
	ETC

Nous avons aussi découvert comment trouver tous les nombres N ayant un chiffre de stationnement CS (compris entre 1 et 9) donné :

N1 = CS + 1x9
N2 = CS + 2x9
N3 = CS + 3x9
N4 = CS + 4x9
N5 = CS + 5x9 Etc.

<u>Exemple</u> : Si CS est égal a 4
4 +1x9=13
4 + 2x9=22
4 + 3x9=31
4 + 4x9=40 etc…
Donc 13, 22, 31, 40 …. ont pour chiffre de stationnement : 4

Vérifions le:

13→1+3=4
22→2+2=4
31→3+1=4
40→4+0=4
49→4+9=13→4

<u>Nous avons observé que le chiffre de stationnement de T1 (N) est le reste de la division euclidienne de N par 9, sauf si N est multiple de 9, dans ce cas CS(N)=9</u>

Exemple si N=84
CS(N)= reste de 84/9
CS(N)=3
vérifions:
84=8+4=12=1+2=3

Preuves:

1) On va prouver qu'à partir de N égal à 10 ,
T1(N) est toujours strictement plus petit que N

soit N un nombre entier naturel non nul au donc : $N \geq 1$

en base 10, N s'écrit avec des chiffres juxtaposés comme ceci :

$N = a_p\, a_{p-1}\, a_{p-2} \dots a_1\, a_0$

ce nombre est écrit avec p+1 chiffres allant de 0 à 9

donc on précise que ap supérieur ou égal à 1. (car ap n'est pas nul)

Alors $T_1(N) = a_p + a_{p-1} + \dots + a_1 + a_0$ (2)

(remarque : si N n'a qu'un chiffre, $N = a_0$ et alors $T1(N) = a_0 = N$)

on choisit un nombre N à au moins deux chiffres donc $p \geq 1$, soit $N \geq 10$

N se calcule suivant cette somme :

$N = a_p\,(10^p) + a_{p-1}\,(10^{p-1}) + \dots + a_1\,(10^1) + a_0\,(10^0)$

$N = a_p\,(10^p) + a_{p-1}\,(10^{p-1}) + \dots + a_1\,(10) + a_0$ (1)

pour comparer N et T1(N)

on effectue la soustraction (1) – (2) , et on factorise par les chiffres (dans les termes, deux par deux) :

$$N - T_1(N) = \underbrace{a_p}_{>0}\,\underbrace{(10^p - 1)}_{>0} + \underbrace{a_{p-1}}_{\geq 0}\,\underbrace{(10^{p-1} - 1)}_{\geq 0} + \dots + \underbrace{a_1}_{\geq 0}\,\underbrace{(10 - 1)}_{>0} + \underbrace{a_0 - a_0}_{=0}$$

Dans cette somme les termes sont tous ≥ 0 ,

sauf le bleu à gauche, qui est > 0 et le rose à la fin, qui est égal à 0

on conclut que : $N - T1(N) > 0$ pour tous les $N \geq 10$

ce qui veut dire que T1(N) est plus petit que N à partir de N = 10

2) Ensuite, on a constaté que N- T1(N) est toujours un multiple de 9 :

calculons :

$$N - T_1(N) = a_p\,(10^p - 1) + a_{p-1}\,(10^{p-1} - 1) + \dots + a_1\,(10^1 - 1) + a_0\,(10^0 - 1)$$

$$= a_p\,\underbrace{(99\dots9)}_{\text{p chiffres 9}} + a_{p-1}\,\underbrace{(99\dots9)}_{\text{(p-1) chiffres 9}} + \dots + a_2\,(99) + a_1\,(9)$$

on observe que 9 est en facteur commun :

$$N - T_1(N) = 9\ [a_p \underbrace{(11\ldots1)}_{p \text{ chiffres } 1} + a_{p-1} \underbrace{(11\ldots1)}_{(p-1) \text{ chiffres } 1} + \ldots + a_2(11) + a_1(1)] = \mathbf{9} \times \mathbf{K}$$

3) on en déduit que si on divise N par 9, et T1(N) par 9 , on trouve les mêmes restes !

on décide de refaire T1 sur le nombre T1(N), puis sur le T1 du T1(N), ainsi de suite.

les résultats vont être strictement décroissants jusqu'à ce qu'on passe sous la barre du 10,

alors on arrive à un nombre qui n'a qu'un chiffre :

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 ou 9

auquel on stationne

on le nomme Chiffre de Stationnement de N : CS(N)

si CS(N) est 9 il a le même reste de division par 9 …que 9 !

c'est que N était un multiple de 9 !

si CS(N) est 1,2,3,4,5,6,7,ou 8

il est exactement le reste de division de N par 9 !

par conséquent, quand on choisit un nombre N on peut savoir à l'avance

à quel CS(N) vont le mener les transformations T1 successives.

il suffit d'effectuer sa division par 9,

dont on connaît des raccourcis (!!!???!!!)

Pour T2 :

Exemple : $T_2(854) = 8^2+5^2+4^2 = 105$

$T_2(105) = 1^2+0^2+5^2 = 26$

$T_2(26) = 2^2+6^2 = 40$

$T_2(40) = 4^2+0^2 = 16$ etc…

On notera :

T_2 : 105→26→40 →16→37→58 →89 →145 →42 →20 →4 →16 … etc

En retrouvant **16** , on s'aperçoit qu'on va avoir ainsi une répétition périodique infinie des résultats.

On fait de nombreux essais, en particulier sur tous les nombres de 1 à 100, pour voir si ce phénomène se produit souvent :

$T_2(1) = 1 \to 1 \ldots$

$T_2(2) = 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to \ldots$

$T_2(3) = 9 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to \ldots$

$T_2(4) = 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to \ldots$

$T_2(5) = 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \to 42 \to 20 \to 4 \to 16 \to 37 \to 58 \to 89 \to \ldots$

$T_2(6) = 36 \to 45 \to 41 \to 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(7) = 49 \to 97 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(8) = 64 \to 52 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(9) = 81 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(10) = 1 \to 1 \ldots$

$T_2(11) = 2 \to 4 \to 16 \ldots$

$T_2(12) = 5 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(13) = 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(14) = 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(15) = 26 \to 40 \to 16 \to 37 \ldots$

$T_2(16) = 37 \to 58 \ldots$

$T_2(17) = 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(18) = 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(19) = 82 \to 68 \to 100 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(20) = 4 \to 16 \ldots$

$T_2(21) = 5 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(22) = 8 \to 64 \to 52 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(23) = 13 \to 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(24) = 20 \to 4 \to 16 \ldots$

$T_2(25) = 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(26) = 40 \to 16 \to 37 \ldots$

$T_2(27) = 53 \to 34 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(28) = 68 \to 100 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(29) = 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(30) = 9 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(31) = 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(32) = 13 \to 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(33) = 18 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(34) = 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(35) = 34 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(36) = 45 \to 41 \to 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(37) = 58 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(38) = 73 \to 58 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(39) = 90 \to 81 \to 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(40) = 16 \to 37 \ldots$

$T_2(41) = 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(42) = 20 \to 4 \to 16 \ldots$

$T_2(43) = 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(44) = 32 \to 13 \to 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(45) = 41 \to 17 \to 50 \to 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(46) = 52 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(47) = 65 \to 61 \to 37 \to 58 \ldots$

$T_2(48) = 80 \to 64 \to 52 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(49) = 97 \to 130 \to 10 \to 1 \to 1 \ldots$

$T_2(50) = 25 \to 29 \to 85 \to 89 \to 145 \ldots$

$T_2(51) = 26 \to 40 \to 16 \to 37 \ldots$

$T_2(52) = 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(53) = 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(54) = 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(55) = 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(56) = 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(57) = 74 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(58) = 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(59) = 106 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(60) = 36 \rightarrow 45 \rightarrow 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(61) = 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(62) = 40 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \ldots$

$T_2(63) = 45 \rightarrow 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(64) = 52 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(65) = 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(66) = 72 \rightarrow 53 \rightarrow 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(67) = 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(68) = 100 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(69) = 117 \rightarrow 51 \rightarrow 26 \rightarrow 40 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \ldots$

$T_2(70) = 49 \rightarrow 97 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(71) = 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(72) = 53 \rightarrow 34 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(73) = 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(74) = 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(75) = 74 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(76) = 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(77) = 98 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \ldots$

$T_2(78) = 113 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \ldots$

$T_2(79) = 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(80) = 64 \rightarrow 52 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(81) = 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(82) = 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(83) = 73 \rightarrow 58 \rightarrow 89 \ldots$

$T_2(84) = 80 \rightarrow 64 \rightarrow 52 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(85) = 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(86) = 100 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(87) = 113 \rightarrow 11 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \ldots$

$T_2(88) = 128 \rightarrow 69 \rightarrow 117 \rightarrow 51 \rightarrow 26 \rightarrow 40 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \ldots$

$T_2(89) = 145 \rightarrow 42 \ldots$

$T_2(90) = 81 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(91) = 82 \rightarrow 68 \rightarrow 100 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(92) = 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(93) = 90 \rightarrow 81 \rightarrow 65 \rightarrow 61 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(94) = 97 \rightarrow 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(95) = 106 \rightarrow 37 \rightarrow 58 \ldots$

$T_2(96) = 117 \rightarrow 51 \rightarrow 26 \rightarrow 40 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \ldots$

$T_2(97) = 130 \rightarrow 10 \rightarrow 1 \rightarrow 1 \ldots$

$T_2(98) = 145 \rightarrow 42 \ldots$

$T_2(99) = 162 \rightarrow 41 \rightarrow 17 \rightarrow 50 \rightarrow 25 \rightarrow 29 \rightarrow 85 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \ldots$

$T_2(100) = 1 \rightarrow 1 \ldots$

Et, chaque fois, c'est comme ça!

Ce qui nous conduit à faire des conjectures :

Les conjectures de T2(N)

Lorsqu'on fait T2(N) et ses successeurs :

- soit on obtient le chiffre 1

(Et notre chercheur nous a appris que les nombres qui donnent 1 s'appellent
les HAPPY NUMBERS)

- soit on tombe sur une ronde de nombres, tous identiques qui sont les suivants:

89,145,42,20,4,16,37,58,89 etc.

preuves:

1) on va montrer qu'à partir de N égal à 100, on a toujours $T_2(N) < N$

comme dans le cas de T_1 , on prend $N \geq 1$

$N = a_p\, a_{p-1}\, a_{p-2} \dots a_1\, a_0$

ceci est un nombre écrit avec p+1 chiffres juxtaposés allant de 0 à 9

et on ajoute que ap n'est pas nul ($a_p \neq 0$)

on choisit un nombre N d'au moins trois chiffres donc $p \geq 2$, soit $N \geq 100$

alors $N = a_p\,(10^p) + a_{p-1}\,(10^{p-1}) + \dots + a_1\,(10^1) + a_0\,(10^0)$

et $T_2(N) = a_p^{\;2} + a_{p-1}^{\;2} + \dots + a_1^{\;2} + a_0^{\;2}$

on compare N et $T_2(N)$ en les soustrayant : $N - T_2(N)$, puis en factorisant par a_p les deux termes où on le trouve :

$N - T_2(N) = \underline{a_p\,(10^p - a_p)} + \underline{a_{p-1}\,(10^{p-1} - a_{p-1})} + \dots + \underline{a_2\,(10 - a_2)} + \underline{a_1\,(10 - a_1)} + \underline{a_0\,(1 - a_0)}$

dans cette somme,

tous les termes sauf le dernier sont ≥ 0

calculons les valeurs que prend le dernier terme, $a_0\,(1 - a_0)$, pour savoir son minimum :

a_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$a_0 (1 - a_0)$	0	0	-2	-16	-12	-20	-30	-42	-56	-72

maintenant prenons le premier terme , le seul qui soit toujours strictement positif . quelle est sa valeur minimale ?on va chercher un minorant :

$$a_p (10^p - a_p) \geq \mathbf{1} (10^2 - \mathbf{9})$$

2 est le minimum de p , 1 est le chiffre minimum , 9 est le chiffre maximum et $a_p > 0$

$a_p (10^p - a_p) \geq 91$ c'est un minorant intéressant, car : $91 + (- 72) > 0$

le premier terme peut ainsi toujours compenser le dernier quand il est négatif et

ainsi $N - T_2(N) > 0$ pour tous les $N \geq 100$

donc si $N \geq 100$, $T2(N) < N$

2) en appliquant T2 sur T2(N) et ses suivants , on descend strictement et on passe au bout d'un certain nombre de transformations sous la barre du 100

on peut remarquer ensuite (mettre la liste des nombres en annexe) que si on expérimente l'effet répété de T_2 sur les nombres de 1 à 100, on voit que tous les nombres entrent, après quelques coups de T_2 ,

dans la ronde qui contient 4 :

4 16 37 58 89 145 42 20 4 ...

ou dans la ronde du 1 : où ils stationnent en **HAPPY NUMBERS**

1 1 1 ...

énumérons les happy numbers plus petits que 100 :

1 13 19 23 28 31 32 44 49 68 79 82 86 91 94 97

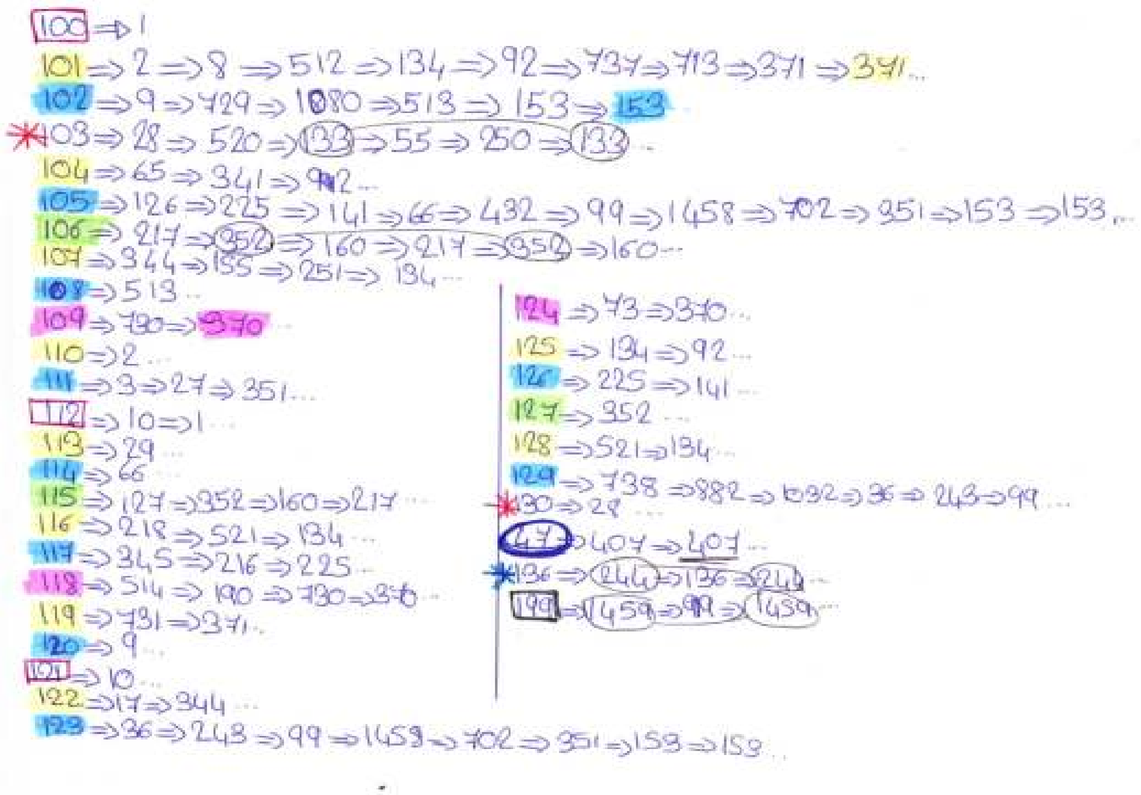
[**Nous avions aussi constaté que pour les happy numbers**
de 1 à 100, aucun ne comportait de chiffre 5 ...
on a cru que 5 ne serait jamais un chiffre de happy number!
mais...cette conjecture est fausse (ex: 5555 qui donne 100, puis 1)]

Pour T3 :

Exemple : $T_3(105)=1^3+0^3+5^3 = 126$
$T_3(126)= 1^3+2^3+6^3 = 225$
$T_3(225)= 2^3+2^3+5^3 = 141$
$T_3(141)= 1^3+4^3+1^3 = 66$ …

On notera T_3 : 105→126→225 →141→66 … etc

voici un échantillon des essais que nous avons réalisés « à la main »,,,jusqu'à 1000!



Pour tous les nombres entiers compris entre 1 et 1000, nous avons ainsi trouvé 9 fins ou « rondes » possibles :

- stationnement à 1
- stationnement à 153
- stationnement à 370
- stationnement à 371
- stationnement à 407

- boucle en 133-55-250-133-55-250…
- boucle en 244-136-244-136…
- boucle en 352-160-217-352-160-217…
- boucle en 1459-919-1459-919…

Preuves:

on va montrer que, par T_3, tous les nombres entiers entreront « plus ou moins vite » dans UNE RONDE car , sauf pour 12 nombres bien déterminés supérieurs à 1000, tous les N supérieurs à 1000 ont leur T_3 strictement inférieur :

1) soit N un nombre tel que $N = a_p\, a_{p-1}\, \dots\, a_2\, a_1\, a_0$ en base 10, avec exactement p+1 chiffres dont a_p n'est pas nul

alors $T_3(N) = a_p^{\ 3} + a_{p-1}^{\ 3} + \dots + a_1^{\ 3} + a_0^{\ 3}$

comme $9^{\ 3} = 729$,

$T_3(N) \leq (p+1)\ 729$

et $N \geq 10^p$

$N - T_3(N) \geq 10^p - (p+1)\ 729$

ainsi lorsque $10^p - (p+1)\ 729 > 0$, $T_3(N) < N$

on a prouvé(**voir ci-dessous**) que si $p \geq 4$, $T_3(N) < N$

Pour montrer que Si $p \geq 4$, $T3(N) < N$, c'est-à-dire : $10^p - (p+1)729 > 0$

Notons $A_p = 10^p - (p+1)729$

si p = 4 , $A_4 = 10^4 - 5 \times 729 = 10\,000 - 3645 > 0$

si p = 5 , $A_5 = 10^5 - 6 \times 729 = 100\,000 - 4374 > 0$

si p = 6 , $A_6 = 10^6 - 7 \times 729 = 1\,000\,000 - 5103 > 0$

Remarquons

$A_4 = 10^4 - 5 \times 729$

$A_5 = 10^5 - 6 \times 729 = 10 \times 10^4 - 5 \times 729 - 729 = 9 \times 10^4 + \underline{10^4 - 5 \times 729} - 729$

$A_5 = A_4 + (9 \times 10^4 - 729) = A_4 + 9\,(10^4 - 81)$

$\mathbf{A_5 = A_4 + 9\,(10^4 - 81)}$ **donc** $\mathbf{A_5 > 0}$

Par récurrence, supposons que ceci se vérifie jusqu'au rang p-1 :

Avec $\mathbf{A_{p-1} > 0}$ **et** $p \geq 5$

Or on peut d'écrire

$A_p = 10^p - (p+1) \times 729 = 10 \times 10^{p-1} - p \times 729 - 729 = 9 \times 10^{p-1} + \underline{10^{p-1} - p \times 729} - 729$

$A_p = A_{p-1} + (9 \times 10^{p-1} - 729) = A_{p-1} + 9\,(\underline{10^{p-1} - 81})$

$10^{p-1} - 81 \geq 10^4 - 81 > 0$

Donc $\mathbf{A_p > 0}$ si $p \geq 5$

On en déduit que depuis le rang p = 4 on a $\mathbf{A_p > 0}$

cqfd

concluons : si $N \geq 10\,000$, $T_3(N) < N$

(ceci concerne tous les nombres d'au moins 5 chiffres.)

2) Ensuite :

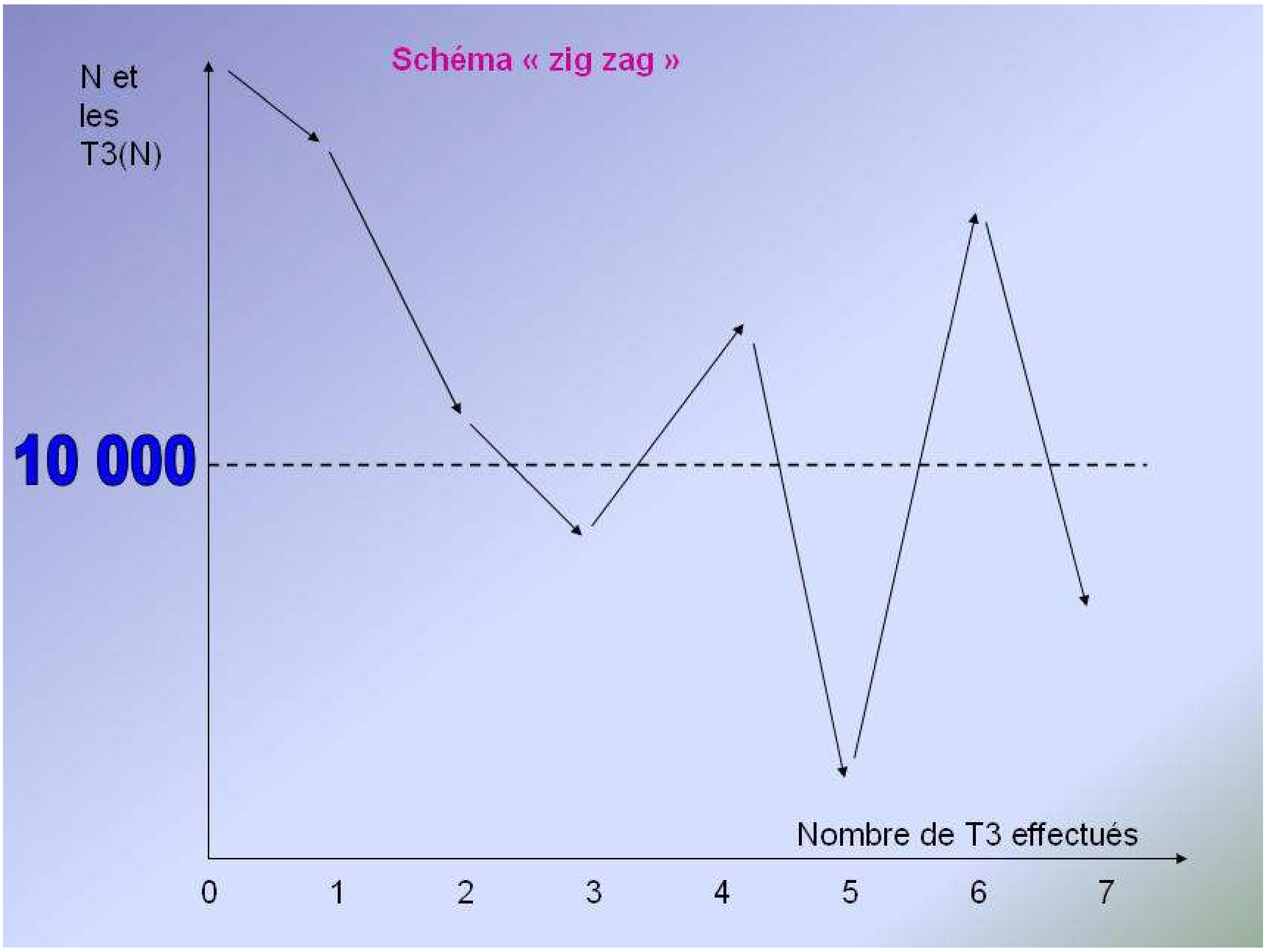
en répétant T_3 sur N et les suivants

on descend strictement et on arrive à passer sous la barre de 10 000,

où il n'y a que 9 999 nombres entiers.

en continuant à effectuer T_3 , on remontera peut-être au-dessus de 10 000, mais ça fera repasser sous 10 000 un peu après , si bien qu'on est obligé de revenir à un nombre plus petit que 10 000 déjà rencontré ! (voir schéma zig zag ci-dessous)

et voilà comment ça « boucle » en ronde !



donc tout entier N va entrer dans une ronde, après un certain nombre fini de« pas », c'est-à-dire, après quelques transformations par T_3 .

3) enfin : quelques éléments de méthodes pour établir l'existence des <u>9 rondes</u> exactement!

soit N un nombre tel que $N \leq 10\,000$

$T_3(N) < 9^3 + 9^3 + 9^3 + 9^3 + 1$

$T_3(N) < 2917$

ainsi **pour tout nombre $N > 2917$, $T_3(N) < N$**

soit N un nombre à 4 chiffres commençant par 2 donc $N \geq 2000$

on l'écrit $N = 2\, a_2\, a_1\, a_0$

$T_3(N) < 9^3 + 9^3 + 9^3 + 2^3$

$T_3(N) < 2195$

donc **pour tout nombre $N > 2195$, $T_3(N) < N$**

soit N tel que $N = 22\, a_1\, a_0$

$T_3(N) < 2^3 + 2^3 + 9^3 + 9^3$

$T_3(N) < 1474$

ainsi **pour tout $N > 2000$, $T_3(N) < N$**

par expérimentations numériques « à la main » **(1)**

on montre que pour tout $N > 1000$

$T_3(N) < N$ sauf exactement pour 12 nombres :

1089 1098 1099 1189 1198 1199 1299 1399 1499 1799 1899 1999

pour ces nombres, après trois applications de T_3 au maximum, on passe sous 1000 .

donc tout entier N va entrer dans une ronde comprenant des nombres plus petits que 1000 au bout d'un certains nombre de « pas», ou plutôt ,après quelques transformations par T_3 .

il y en a 9.

ces 9 rondes sont celles qui ont été annoncées, celles de :

1, 153, 370, 371, 407, 136-244 , 919-1459 , 133-55-250 , 160-217-352 .

(*NOTE : ce catalogue complet a été obtenu exclusivement par diverses études numériques sans utiliser d'ordinateur...*)

Pour finir, nous avons énoncé quelques idées et conjectures exploitables, pour continuer sur ce sujet:

Peut-on connaître d'avance les Happy numbers?
Notre chercheur nous a expliqué que c'est un problème...un peu trop ambitieux pour nous !
(À l'heure actuelle les mathématiciens ne savent pas le faire...)

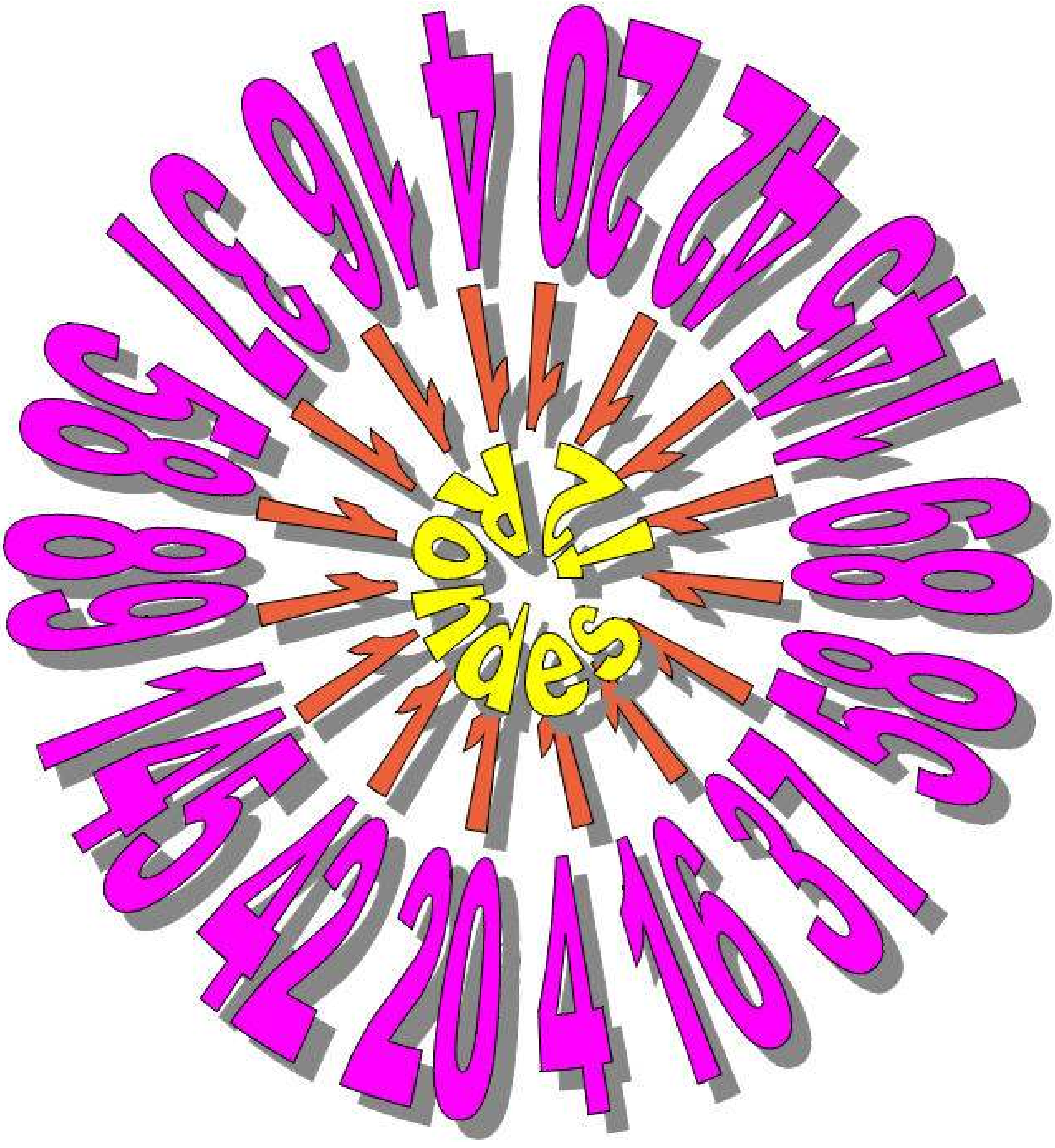
Conjectures au sujet de la parité:
•Si on trouve que le résultat de T1 est pair, alors les résultats de T2 etT3 seront pairs aussi (**valable uniquement si on s'arrête au premier calcul**).
Exemple : Pour n = 422
•T1 (422)=2+2+4=8 pair
•T2 (422)=$2^2+2^2+4^2=24$ pair
•T3 (422)=$2^3 + 2^3 + 4^3=80$ pair

•Même cas pour les nombre impairs, si on trouve que le résultat de T1 est impair, alors les résultats de T2 et T3 seront impairs aussi (**valable uniquement si on s'arrête au premier calcul**).
Exemple Pour n=144
•T1(144)=4+4+1=9 impair
•T2(144)=$4^2+4^2+1^2=16+16+1=33$ impair
•T3(144)=$4^3+4^3+1^3=64+64+1=129$ impair

(2)

Une conjecture sur T4, T5, T6,...Tk
(nous nommons ainsi les transformations du même type où les chiffres auront les puissances 4, 5, 6, ...k...)
Nous pensons que tous les N rentreraient dans des rondes, en nombre fini, pour chacune des transformations Tk
(Non prouvé,
mais on a essayé de trouver une sorte de preuve comme pour T1, T2, T3, tout en remarquant que les ajustements compensatoires devenaient plus délicats, ... et on a...abandonné, devant la difficulté !)

Rondes T2



Rondes T3

Notes de l'édition
(1) On aurait pu dire qu'en regardant le signe de N-T3(N), seuls les 8 ou 9 à la fin pouvaient poser problème et qu'on a ainsi limité le nombre de cas à regarder à la main
(2) Il faudrait mieux se référer au nombre impair ou nombre pair de chiffres impairs