Introduction à la tomographie

DEPOLLIER Candice, KOPP Marie, QUESSON Domitille, SONNTAG Alixa,

Élèves de TS du Lycée Jean Renoir, Munich (D)
Enseignant : Caroline PROVOST
Chercheur : Laurent DÉMARET

Sujet

Nous allons essayer de répondre aux questions suivantes posées par notre chercheur :

- Comment reconstruire un objet plan traversé par des rayons, à partir de valeurs mesurées?
- Combien de prises de vue sont nécessaires pour reconstruire un objet donné?
- Comment peut-on visualiser les résultats?

Mots-clés

TOMOGRAPHIE, PLAN, QUADRILLAGE, ÉQUATION LINÉAIRE, MATRICE

En 1896 le physicien Wilhelm Conrad Röntgen découvre les rayons X à l'université de Würzburg. C'est le début de l'imagerie médicale. Grâce aux différentes propriétés d'absorption des tissus du corps humain traversés par les rayons X, l'image du corps peut être projetée sur un plan à deux dimensions. Quelques décennies plus tard, dans les années 1960-70, Godfrey Newbold Hounsfield et Allan Mac Leod Cormack ont développé le principe de la tomographie par scanner qui permet de reconstruire l'objet en 3D à partir de plusieurs prises de vues bidimensionnelles. Cette phase de reconstruction s'appuie sur un important formalisme mathématique, auquel nous nous sommes intéressées...

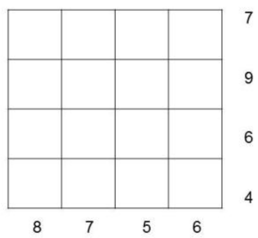
[Fonctionnement d'un tomographe]

Mais tout d'abord, comment fonctionne un tomographe? En simplifiant il est constitué d'une source qui émet des rayons X et d'un récepteur qui reçoit le rayon. Ce rayon est atténué différemment en fonction des organes qu'il traverse. Par exemple si l'on coupe un être humain au niveau de la cage thoracique, on aura à la fois les poumons (comme ils sont pleins d'air le rayon sera peu atténué), les côtes (comme ce sont des os, elles atténuent beaucoup le rayon) et de la matière organique (elle atténue plus ou moins le rayon). Cette atténuation correspond à une perte d'énergie du rayon ce qui nous permet de déterminer la nature de l'organe traversé. La forme numérique est obtenue grâce à un logiciel qui analyse l'intensité lumineuse pour la convertir en données numériques.

Ces données numériques nous donnent une image en 2D, et en superposant toutes les images obtenues en 2D, nous pouvons reconstruire l'objet en 3D. Prenons l'exemple d'une pomme de terre : le tomographe nous donne l'image de chaque «chips», et en les superposant on obtient la pomme de terre entière.

[Un modèle simplifié]

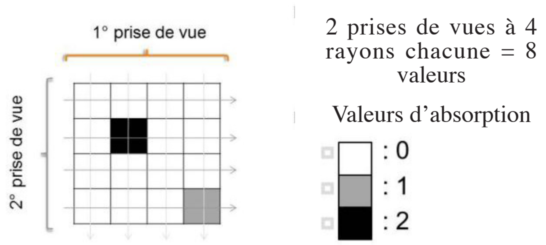
Nous avons donc concentré notre étude sur les images en 2D : pour ceci nous avons représenté le plan de l'objet par un carré contenant des cases blanches et connaissant les valeurs des rayons atténués nous avons cherché à déterminer les valeurs de chaque case.



représentation par un quadrillage de la chips traversée par des rayons

C'est pour cette raison que nous nous sommes demandées si résoudre le problème posé par le chercheur ne revenait pas à créer un logiciel ou du moins comprendre le fonctionnement d'un tel logiciel qui convertit les données numériques en images en trois dimensions.

Nous avons commencé par représenter l'objet à scanner par un carré lui-même composé de plus petits carrés. Par rapport au corps qui est en 3D, nous avons fait des modèles simplifiés en 2D. Le premier modèle était un carré de 4x4.

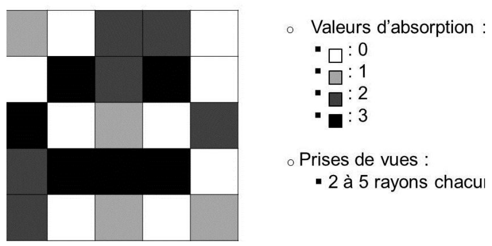


Simplification en 2D

Nous envoyons ensuite des rayons dans cet objet, le long des lignes et des colonnes, il y avait donc 2 prises de vues correspondant à 4 rayons chacune. Nous obtenons ainsi la *somme* des valeurs d'absorption des cases en bas des colonnes et à droite des lignes (la case blanche n'absorbant pas (valeur 0), la case grise absorbant un peu (valeur 1) et la case noire absorbant beaucoup (valeur 2) … bien qu'en réalité, lorsqu'une partie du corps n'absorbe pas, l'image est noire (donc 2 au lieu de 0 ici) et non blanche).

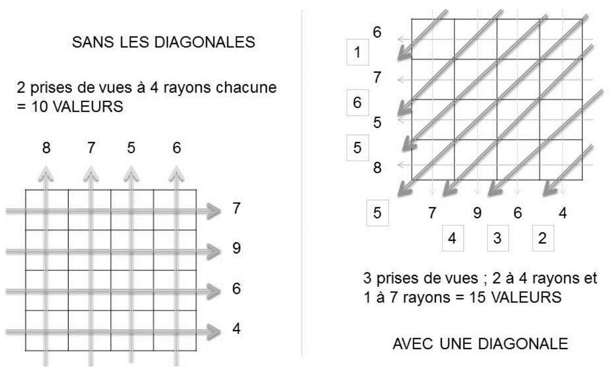
Nous avons remarqué que lorsqu'une colonne, une ligne (ou même une diagonale) a pour valeur 0, ce 0 est « dominant », c'est à dire que toutes les cases de la ligne ou de la colonne ont pour valeur 0.

Nous avons ensuite considéré un carré plus complexe, en rajoutant une ligne et une colonne, et en colorant plus de cases, avec plus de niveaux de gris. On avait alors des valeurs par couleur qui allaient jusqu'à 3:



0 : blanc, 1 : gris clair, 2 : gris foncé, 3 : noir

À ce niveau [de précision], le nombre de valeurs données par les rayons (10 = 5 valeurs lignes et 5 valeurs colonnes) n'était plus suffisant pour résoudre le carré et retrouver où et dans quel ordre se trouvaient les cases grisées. Nous avons donc envoyé d'autres rayons dans notre carré en 2D, en suivant les diagonales.



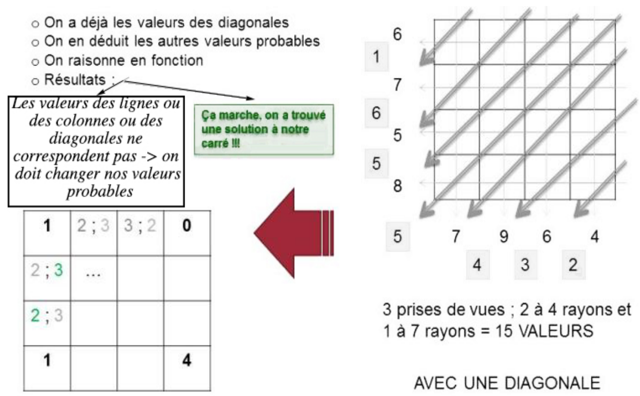
Puis, nous nous sommes intéressées plus précisément à la manière de résoudre notre carré (ce qui revenait en quelque sorte à résoudre un Sudoku !).

[Essais de toutes les possibilités]

Nous avons été obligées de poser une des différentes possibilités, et raisonner pour les autres cases à partir de cette nouvelle donnée.

Nous avions déjà les valeurs des diagonales des coins qui indiquent directement leurs valeurs respectives. Nous en déduisions les autres valeurs possibles.

Ensuite, nous en posions une ou deux, nous raisonnions en fonction de ces valeurs. Si au bout du compte, les valeurs des lignes, colonnes et diagonales ne correspondaient pas, nous essayions avec les autres valeurs possibles et nous recommencions jusqu'à ce que le carré soit résolu. C'est ce que nous avons fait avec un carré de dimension 5x5.

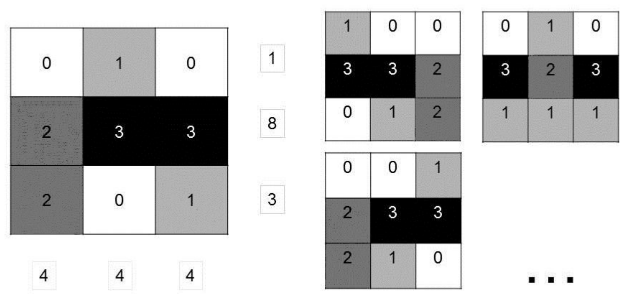


L'ennui, c'est que c'était très long !

[Utilisation d'un système d'équations]

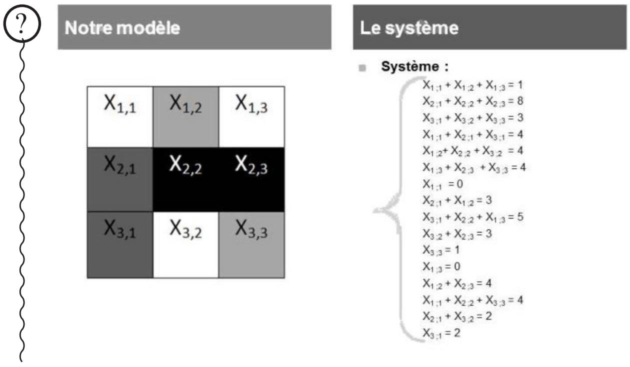
Pour simplifier nos recherches, nous sommes repassées à un carré 3x3. Nous avons cherché à trouver une formule qui nous permettrait de trouver les résultats à partir de nos données. Mais la réalité est beaucoup plus complexe.

[En particulier il peut y avoir plusieurs solutions comme le montre l'exemple ci-dessous]

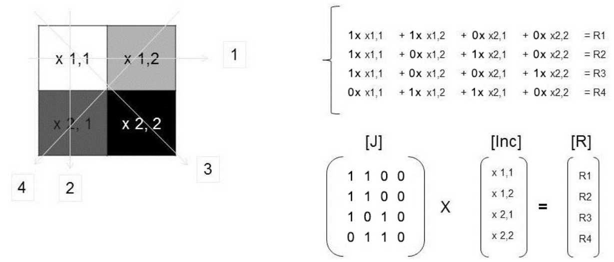


Problème : on trouve plusieurs solutions

Cependant, si le carré est plus petit, un système peut aider à trouver les possibilités pour le reconstituer.

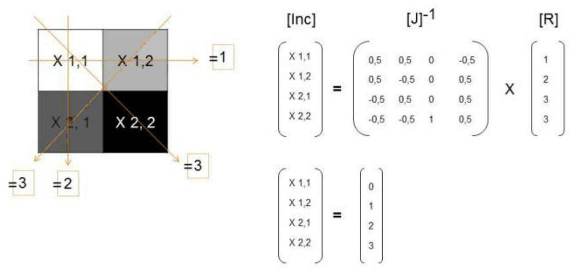


Pour résoudre ces systèmes, souvent compliqués, nous avons utilisé le calcul matriciel :



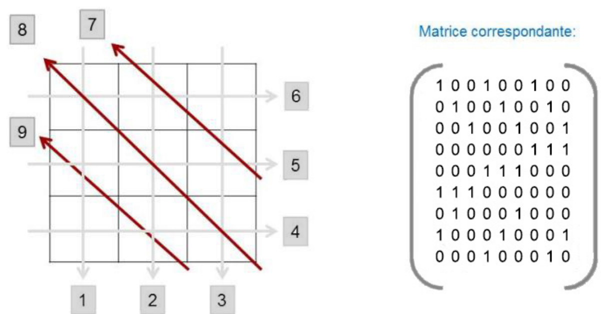
[Les chiffres encadrés indiquent les numéros d'équations]

Par exemple :



[Les chiffres indiquent les sommes données]

Mais, nous avons de nouveau rencontré une difficulté : les matrices n'étaient pas toujours inversibles, comme ci-dessous :



[Conclusion]

Finalement, en résolvant nos systèmes, à l'aide du pivot de Gauss ou du calcul matriciel, nous avons réussi à proposer des carrés satisfaisant aux conditions données sur les lignes, les colonnes et/ou les diagonales.

Mais en utilisant le minimum de prises de vues, c'est-à-dire juste les lignes et les colonnes sans les diagonales, le peu de données, dont le nombre est pourtant suffisant, peut nous conduire à trouver des résultats différents, dont la bonne solution [mais sans pouvoir l'identifier].

Il faut donc le plus de prises de vues et de rayons possibles, à la fois pour pouvoir résoudre le carré plus vite et avoir le plus de données possible, donc d'indices et réduire le nombre de valeurs possibles, mais aussi et surtout pour trouver la bonne solution. Ceci n'est pas aussi simple en médecine, car le patient doit être exposé le moins possible aux rayons (nuisibles à la santé). Il faut donc savoir choisir la bonne solution parmi toutes celles obtenues.

***