

# Jeu de Nim

Maël GALLARDON, Kyllian RAOULT, Ewan De OLIVEIRA, Maxence MOREL, Orwald MEUNIER, Thibaut LARDÉ, Louis CAMARD, Lou GAUTIER, Amandine ELLIEN, Laureline ZORZI, élèves de 5<sup>e</sup>

Encadrés par Pascale BÉASSE et Béatrice BOILLOT

Établissement : collège Saint-Pierre (Plouha)

Chercheur : Victor KLEPTSYN, CNRS et Université Rennes 1

## I- Présentation

### Règles du Jeu

Tout d'abord, le matériel nécessaire sont des coupelles et un certain nombre de pions ou de pierres. Cela se joue à deux. Les joueurs choisissent le nombre de coupelles qu'ils veulent. Nous nous sommes arrêtés à trois coupelles.

Le premier joueur prend le nombre de pierres qu'il veut dans une des coupelles. Il a le droit de vider une coupelle.

Ensuite, c'est au tour du deuxième joueur de choisir la coupelle et le nombre de pierres qu'il veut en retirer.

En résumé, chacun à leur tour, les joueurs peuvent choisir une coupelle et prendre autant de pierres qu'ils veulent dans cette coupelle.

### But du jeu :

Être celui qui prend la dernière pierre du jeu, c'est-à-dire la ou les pierres qui reste(nt) dans une coupelle.

***Exemple :** Si j'ai 2 pierres dans une coupelle et 5 dans l'autre et que mon adversaire vide la coupelle dans laquelle il y a 5 pierres, il reste une coupelle dans laquelle se trouvent 2 pierres. Pour gagner, je vais prendre les 2 dernières pierres et mon adversaire ne peut rien faire car il n'y a plus de pierres dans aucune coupelle : j'ai donc gagné.*

### Précisons quelques interdictions :

- les deux joueurs n'ont pas le droit de jouer tous les deux en même temps ;
- on n'a pas le droit de prendre dans deux coupelles sinon le joueur aura triché ;
- l'adversaire en position perdante n'a évidemment pas le droit de remettre de pierre dans une coupelle au cours de la partie.

### La question du chercheur :

La question que notre chercheur **Victor Klepsyn** nous a posée est : « **quelles sont les positions gagnantes et perdantes pour le 1<sup>er</sup> joueur ?** » Autrement dit « Dans quels cas le 1<sup>er</sup> joueur (toujours celui qui commence), si il joue très bien, va-t-il gagner ? Dans quels cas ce joueur (toujours celui qui commence) va t-il perdre même si il joue très bien ? »

On suppose naturellement que chacun de deux joueurs cherche à chaque fois à jouer le mieux possible.

## II- Résultats obtenus et démonstrations

### 1) Qu'est ce qu'un niveau ?

Le niveau correspond au nombre de pierres qu'il y a dans la troisième coupelle.  
Par exemple si j'ai 2 pierres dans la coupelle A, 5 pierres dans la coupelle B et 6 pierres dans la coupelle C, je suis au niveau 6 car il y a 6 pierres dans la troisième coupelle.

### 2) Présentation des résultats du niveau 0

- Le premier joueur est certain de perdre quand il y a une pierre dans chacune des deux coupelles.

*(On nomme A et B les deux coupelles)*

Si le premier joueur prend la pierre de la coupelle A, il ne restera qu'une seule pierre dans la coupelle B. Le deuxième joueur va donc la prendre et gagner car c'est la dernière pierre du jeu dans cette situation là.

Si le premier joueur avait pris la pierre de la coupelle B le deuxième joueur aurait pris la pierre de la coupelle A et il aurait également gagné car la pierre de la coupelle B, dans cette situation là, est la dernière pierre du jeu.

Donc le premier joueur est certain de perdre quand il y a deux coupelles avec une pierre dans chacune d'entre elles.

- Tableau des résultats

Nous avons inscrit nos résultats dans un tableau à double entrée.

La **première ligne** indique le nombre de pierre dans la **coupelle A** et la **première colonne** indique le nombre de pierre dans la **coupelle B**.

*Ce tableau sera utilisé pour tous les niveaux (niv. 1, niv. 2...)*

Dans ce tableau, nous avons noté **G** quand le premier joueur gagne la partie et **P** quand c'est le deuxième joueur qui gagne.

**PROPRIÉTÉ SUPER IMPORTANTE !!!!**

Si le premier joueur est en situation gagnante alors le deuxième joueur est en situation perdante. Réciproquement, si le deuxième joueur est en situation gagnante le premier joueur est en situation perdante.

**P** = Perdant

**G** = Gagnant

0	1	2	3	4
1	<b>P</b>			
2				
3				
4				

- Toute la diagonale du niveau 0 est perdante

Les positions perdantes pour le premier joueur au niveau 0 sont les positions où il y a le même nombre de pierres dans les deux coupelles ce qui correspond aux positions inscrites dans la diagonale de notre tableau.

## Démonstration :

Dans cette diagonale, il y a le même nombre de pierres dans chaque coupelle

Exemple : Prenons pour exemple la situation **2-2** : il y a 2 pierres dans la coupelle A et 2 pierres dans la coupelle B, la coupelle C étant vide. Nous supposons bien sûr que les joueurs cherchent à tous les coups à jouer le mieux possible.

Le premier joueur va commencer par prendre 1 pierre dans la coupelle A, le deuxième joueur prend une pierre dans la coupelle B, le premier joueur retire la dernière pierre de la coupelle B ensuite le deuxième joueur retire la dernière pierre du jeu en retirant la dernière pierre de la coupelle A. Le deuxième joueur a gagné car il a enlevé la dernière pierre du jeu.

Cette stratégie fonctionne pour chaque cas de la diagonale du niveau 0 :

Le deuxième joueur gagne à coup sûr à chaque fois car si le premier joueur décide de prendre  $n$  pierres dans une coupelle, le deuxième décidera logiquement de retirer également  $n$  pierres dans l'autre coupelle.

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	P								
1		P							
2			P						
3				P					
4					P				
5						P			
6							P		
7								P	
8									P

- Toutes les autres positions sont gagnantes

Pour les autres situations du niveau 0, il y a un nombre de pierres différent dans les coupelles A et B.

Le premier joueur va retirer des pierres de la coupelle qui en contient le plus en faisant en sorte de laisser dans cette coupelle le même nombre de pierres que dans l'autre.

L'adversaire se retrouvera alors en situation perdante : comme nous l'avons expliqué précédemment, lorsqu'il y a le même nombre de pierres dans chaque coupelle A et B, le joueur qui joue en premier ne peut pas gagner.

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	P	G	G	G	G	G	G	G	G
1	G	P	G	G	G	G	G	G	G
2	G	G	P	G	G	G	G	G	G
3	G	G	G	P	G	G	G	G	G
4	G	G	G	G	P	G	G	G	G
5	G	G	G	G	G	P	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G	P	G	G
7	G	G	G	G	G	G	G	P	G
8	G	G	G	G	G	G	G	G	P

- Exploitation du tableau

Quand nous jouons, soit nous nous décalons à gauche sur la ligne de départ, soit nous montons sur la colonne de départ.

*Pourquoi ?*

Prenons l'exemple de la position de départ **5 - 6** (5 pierres dans la coupelle A et 6 pierres dans la coupelle B)

Si j'enlève 1 pierre de la coupelle A, j'arrive dans la position 4 - 6, je me suis décalé vers la gauche.

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	P	G	G	G	G	G	G	G	G
1	G	P	G	G	G	G	G	G	G
2	G	G	P	G	G	G	G	G	G
3	G	G	G	P	G	G	G	G	G
4	G	G	G	G	P	G	G	G	G
5	G	G	G	G	G	P	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G	P	G	G
7	G	G	G	G	G	G	G	P	G
8	G	G	G	G	G	G	G	G	P

Si j'enlève 1 pierre de la coupelle B, j'arrive dans la position 5 - 5, je suis monté d'un cran sur la colonne de départ.

Or si un **P** se trouve au-dessus ou à gauche de notre case départ, nous pouvons mettre notre adversaire en situation perdante, nous sommes donc en situation gagnante.

Reprenons l'exemple de la situation de départ **5 - 6** niveau **0** (5 pierres dans la coupelle A, 6 pierres dans la coupelle B et 0 pierres dans la coupelle C)

Si je décide de retirer 1 pierre de la coupelle B, l'adversaire sera en situation perdante car en enlevant 1 pierre il est monté d'1 cran sur la colonne de départ, le 1<sup>er</sup> joueur a donc mis l'adversaire dans la situation **5 - 5** qui est bien indiquée perdante dans notre tableau.

La situation de départ **5 - 6** est donc bien une situation gagnante.

### 3) Présentation des résultats du niveau 1

- Les situations correspondant à la diagonale sont gagnantes

Toutes les positions de la diagonale sont des situations dans lesquelles les coupelles A et B ont exactement le même nombre de pierres et la coupelle C contient une seule pierre.

La stratégie gagnante consiste à prendre la pierre de la coupelle C.

Comme il n'y a plus de pierres dans la coupelle C, le premier joueur ramène donc son adversaire sur une situation de la diagonale du niveau 0.

L'adversaire étant en situation perdante, le premier joueur est donc en situation gagnante sur toute la diagonale du niveau 1.

- Les situations 0 - 1 et 1 - 0 sont perdantes

Pour 0 - 1 et 1 - 0 niveau 1, c'est une situation **perdante** pour le premier joueur, car 0 - 1 niveau 1, c'est comme 1 - 1 niveau 0, nous avons simplement changé les noms des

coupelles :

0-1 niveau 1, c'est 1 pierre dans 2 coupelles, et une coupelle vide, et pour 1-1 niveau 0, il y a aussi 1 pierre dans 2 coupelles, et une coupelle vide.

- **Les situations 3 - 2 et 2 - 3 sont perdantes**

Si le premier joueur retire la pierre de la coupelle C, le second joueur enlèvera une pierre dans la coupelle A. Il restera 2 pierres dans la coupelle A et 2 pierres dans la coupelle B, c'est la situation perdante 2- 2 au niveau 0.

Si le premier joueur retire une pierre dans la coupelle B, le deuxième joueur videra la coupelle A, il restera donc une 1 pierre dans la coupelle B et 1 pierre dans la coupelle C, c'est la situation perdante 1-1 au niveau 0.

Si le premier joueur vide la coupelle B, le second joueur prendra 2 pierres dans la coupelle A, ce qui laissera une pierre dans la coupelle A et une pierre dans la coupelle C, c'est la situation perdante 1-1 au niveau 0.

Si le premier joueur retire une pierre dans coupelle A, le second joueur prendra la pierre de la coupelle C ce qui laissera 2 pierres dans la coupelle A et 2 pierres dans la coupelle B, c'est la situation perdante 1-1 au niveau 0.

Si le premier joueur prend 2 pierres dans la coupelle A le deuxième joueur prendra les deux pierres de la coupelle B ce qui laissera la situation perdante 1-0 au niveau 1.

Si le premier joueur vide la coupelle A le second joueur prendra une pierre dans la coupelle B ce qui laissera la situation perdante 0-1 au niveau 1.

On remarque que le premier joueur n'arrivera jamais à mettre le second joueur en situation perdante : le **cas 3 - 2 - 1** est donc **perdant pour le premier joueur**.

- **Tableau des résultats**

Lorsqu'une situation est perdante, un P est inscrit dans la case correspondante du tableau des résultats. On peut ensuite compléter la colonne sous ce P et la ligne à sa droite avec des G (situations gagnantes) car le 1er joueur pourra ramener son adversaire sur une situation perdante.

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G
1	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
2	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G
3	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G
4	G	G	G	G	G						
5	G	G	G	G		G					
6	G	G	G	G			G				
7	G	G	G	G				G			
8	G	G	G	G					G		
9	G	G	G	G						G	
10	G	G	G	G							G

En poursuivant avec les mêmes raisonnements, voici le tableau des résultats pour le niveau 1 (1):

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G
1	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
2	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G
3	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G
4	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G
5	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G
6	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G
7	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G
8	G	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G
9	G	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G
10	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G

#### 4) Présentation des résultats du niveau 2

- Les situations correspondant à la diagonale sont gagnantes

Le nombre de pierres des coupelles A et B est le même. Dans la coupelle C, il y a 2 pierres.

En retirant les deux pierres de la coupelle C, on met le 2e joueur en situation perdante. Toutes les situations sur la diagonale du niveau 2 sont donc **gagnantes pour le premier joueur**.

- Les méthodes permettant de remplir le tableau

- ✓ Raisonnement avec les niveaux inférieurs

Pour compléter le tableau des résultats d'un niveau supérieur, on peut s'appuyer sur les niveaux déjà étudiés, en modifiant le nom des coupelles.

Par exemple :

Pour la situation **1 - 0 du niveau 2**, il y a 1 pierre dans la coupelle A, 0 pierre dans la coupelle B et 2 pierres dans la coupelle C.

Cette situation est identique à la situation **1 - 2 du niveau 0** en inversant les noms des coupelles B et C. Sachant que cette situation **1 - 2 niveau 0** est gagnante, on en déduit que la situation **1 - 0 du niveau 2** est **gagnante**.

- ✓ Remplissage des lignes et colonnes grâce aux situations perdantes

Comme indiqué précédemment, lorsqu'on a trouvé une situation perdante (P), on peut compléter la colonne sous ce P et la ligne à sa droite avec des G (situations gagnantes) car le 1er joueur pourra ramener son adversaire sur une situation perdante.

- ✓ Remplissage des cases grâce aux situations gagnantes

Si le premier joueur, en jouant des pierres dans l'une ou l'autre des coupelles, met le deuxième joueur en situation gagnante, alors il se trouve dans une situation perdante.

Si au-dessus d'une case il n'y a que des G, et à gauche aussi, le premier joueur est obligé de jouer dans la coupelle C, il doit changer de niveau. Si malgré son changement de niveau le premier joueur met le deuxième joueur en situation gagnante, alors il sera aussi dans une situation perdante.

- [Tableau des résultats \(2\)](#)

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
0	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
1	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G
2	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
3	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G
4	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G
5	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G
6	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G	G
7	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G	G	G
8	G	G	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G
9	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G
10	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G	G
11	G	G	G	G	G	G	G	G	P	G	G	G	G
12	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G	G

### 5) [Le tableau bilan](#)

Le tableau bilan regroupe toutes les situations perdantes.  
Le numéro inscrit dans chaque case indique le niveau pour lequel la situation est perdante (3).

**Bilan**

A \ B	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

Par exemple :

- ✓ pour la situation 3 - 2 (3 pierres dans la coupelle A et 2 pierres dans la coupelle B ), on voit qu' un 1 est noté dans la case correspondante. Cela signifie que cette situation est perdante pour le 1<sup>er</sup> joueur au niveau 1 (1 pierre dans la coupelle C)
- ✓ pour la situation 2 - 6 (2 pierres dans la coupelle A et 6 pierres dans la coupelle B), on voit qu'un 4 est noté dans la case correspondante. Cela signifie que cette situation est perdante pour le 1<sup>er</sup> joueur au niveau 4 (4 pierres dans la coupelle C)

Dans le tableau bilan, on constate qu'il n'y a qu'un seul numéro par case car si c'est perdant à un niveau, pour tous les niveaux supérieurs ce sera une situation gagnante : en effet le 1<sup>er</sup> joueur retirera des pierres de la coupelle C afin de ramener son adversaire sur un niveau pour lequel la situation correspondant au contenu des coupelles A et B est perdante.

On constate aussi qu'il y a des motifs qui se répètent : ces motifs sont de plus en plus gros.

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

B \ A	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	3	2	5	4	7	6
2	2	3	0	1	6	7	4	5
3	3	2	1	0	7	6	5	4
4	4	5	6	7	0	1	2	3
5	5	4	7	6	1	0	3	2
6	6	7	4	5	2	3	0	1
7	7	6	5	4	3	2	1	0

On a vu également que sur chaque ligne, chaque nombre apparaît une seule fois.

### III- Conclusion

Notre travail s'est arrêté là mais nous savons qu'il reste encore de nombreuses choses à découvrir concernant ce jeu de Nim, par exemple une autre façon de résoudre le problème en utilisant la base 2, comme a pu nous l'expliquer l'une des personnes venue sur notre stand lors du congrès à Angers.

#### Notes d'édition

(1) La situation 5 - 4 niveau 1 est perdante car si le joueur 1 prend la pierre de la coupelle C il laisse la situation 5 - 4 niveau 0 qui est gagnante, et si il prend des pierres de la coupelle A ou de la coupelle B il arrive à une situation correspondant à une case située soit avant la colonne 5 sur la 4e ligne soit plus haut que la ligne 4 sur la 5e colonne, or toutes ces cases sont déjà marquées gagnantes. Comme remarqué plus haut, on peut ensuite marquer gagnantes toutes les cases sur situées à droite ou en-dessous. De même pour la situation 4 - 5 niveau 1, et on n'a plus qu'à recommencer pour les cases 7 - 6 et 6 - 7 niveau 1, puis de proche en proche les cases  $(2n+1) - 2n$  et  $2n - (2n+1)$  niveau 1 sont perdantes et les autres gagnantes.

(2) On remplit le tableau de proche en proche de même que pour le niveau 1, en tenant compte que le joueur 1 peut enlever 1 ou 2 pierres de la coupelle C et que la situation est gagnante lorsqu'on arrive alors à une situation perdante du niveau 1 ou du niveau 0.

(3) Il aurait été utile de dire comment cette table est remplie, à part pour les cas déjà vus, c'est-à-dire pour les cases contenant un 0, un 1 ou un 2. On peut encore le faire de proche en proche : étant donnée une case, on a vu qu'un niveau donne une situation gagnante s'il y a déjà une situation perdante pour une case située à gauche ou au-dessus, donc on ne peut avoir dans la case un nombre figurant à gauche ou au-dessus ; mais si un niveau ne figure ni à gauche ni au-dessus, c'est-à-dire si en jouant dans les coupelles A ou B on arrive toujours à une situation gagnante, on aura une situation perdante si en prenant des pierres dans la coupelle C on n'arrive aussi qu'à des situations gagnantes : c'est bien le cas pour *le plus petit nombre entier positif ou nul ne figurant ni à gauche ni au-dessus*, et on trouve comme cela le nombre à placer dans la case lorsque toutes les cases à gauche et au-dessus ont déjà été remplies.