

Un jeu avec des entiers

Collège des explorateurs Cergy 2004

Si on se donne 4 entiers naturels a , b , c et d qu'on dispose sur une ligne, on construit une nouvelle ligne qu'on écrit en dessous les entiers $|a-b|$ $|b-c|$ $|c-d|$ $|d-a|$

Ensuite on construit de même une 3ème ligne... En prenant $a=5$, $b=11$, $c=0$ et $d=2$ on obtient ainsi successivement:

a	b	c	d
5	11	0	2
6	11	2	3
5	9	1	3
4	8	2	2
4	6	0	2
2	6	2	6
4	4	0	0
0	4	0	4
4	4	4	4
0	0	0	0

Et donc toutes les lignes suivantes sont constituées de 4 zéro.

Est-ce un coup de chance ou bien doit-on toujours arriver à une ligne constituée de 4 zéro?

Sujet proposé par M. COLADO.

Présenté par Amélie Murday (5e), Sarah Haïdara (6e) et André Ponnouradjane (5e).

1. « La vitesse »

Si on met des nombres qui sont petits ça ne nous donne pas toujours plus vite 0 0 0 0.
Une ligne juste avant quatre zéro on trouve quatre nombres similaires et encore avant (15)
deux zéros séparés et deux nombres.

11	568974	56234	897452	3654892
12	512740	8411218	2757440	3085918
13	328478	1916222	328478	2573178
14	1587744	1587744	2244700	2244700
15	0	656956	0	656956
16	656956	656956	656956	656956
17	0	0	0	0

2. « La position »

Quand je décale A et que je le mets à la place de B et que B je le mets à la place de C ainsi de suite je trouve le même résultat et le même nombre de lignes

	a	b	c	d
11	5682	3568	1792	9524
12	2114	1776	7732	3842
13	338	5956	3890	1728
14	5618	2066	2162	1390
15	3552	96	772	4228
16	3456	676	3456	676
17	2780	2780	2780	2780
18	0	0	0	0

3. L'influence des nombres pairs et impairs.

Quand il y a 4 nombres impairs sur la première ligne à la suite il n'y aura que des nombres pairs.

Quand on met des multiples d'un nombre à la suite on aura toujours des nombres de la table de multiplication.

On peut aussi remarquer que, avant la ligne des 4 nombres similaires on trouve deux paires de nombres égaux.

40235	9805	4320	2036
30430	5485	2284	38199
24945	3201	35915	7769
21744	32714	28146	17176
10970	4568	10970	4568
6402	6402	6402	6402
0	0	0	0

Les nombres sont différents et suivant les nombres de départ, les calculs sont plus ou moins de la "même longueur".

1^{ER} Exemple : →

18	144	33	27
126	111	6	9
15	105	3	117
90	102	114	102
12	12	12	12
0	0	0	0

2eme Exemple →

75395	98765	95175	87665
23370	3590	7510	12270
19780	3920	4760	11100
15860	840	6340	8680
15020	5500	2340	7180
9520	3160	4840	7840
6360	1680	3000	1680
4680	1320	1320	4680
3360	0	3360	0
3360	3360	3360	3360
0	0	0	0

Quand je décale A et que je le mets à la place de B et que B je le mets à la place de C ainsi de suite je trouve le même résultat et le même nombre de lignes.

	a	b	c	d	
11		5682	3568	1792	9524
12		2114	1776	7732	3842
13		338	5956	3890	1728
14		5618	2066	2162	1390
15		3552	96	772	4228
16		3456	676	3456	676
17		2780	2780	2780	2780
18		0	0	0	0

Quand il y a 4 nombres impairs (11), à la suite il n'y aura que des nombres pairs. Quand on met des multiples d'un nombre à la suite on aura toujours des nombres de la table de multiplication utilisée.

On peut aussi trouver avant la ligne des 4 nombres similaires deux nombres pareils et deux autres.

40235	9805	4320	2036
30430	5485	2284	38199
24945	3201	35915	7769
21744	32714	28146	17176
10970	4568	10970	4568
6402	6402	6402	6402
0	0	0	0

Les nombres sont différents et suivant les nombres ils font plus ou moins de lignes.

1	144	33	27
126	111	6	9
15	105	3	117
90	102	114	102
12	12	12	12
0	0	0	0

Les calculs dépendent de la parité des 4 nombres de départ.

On code:

-Un nombre impair par 1

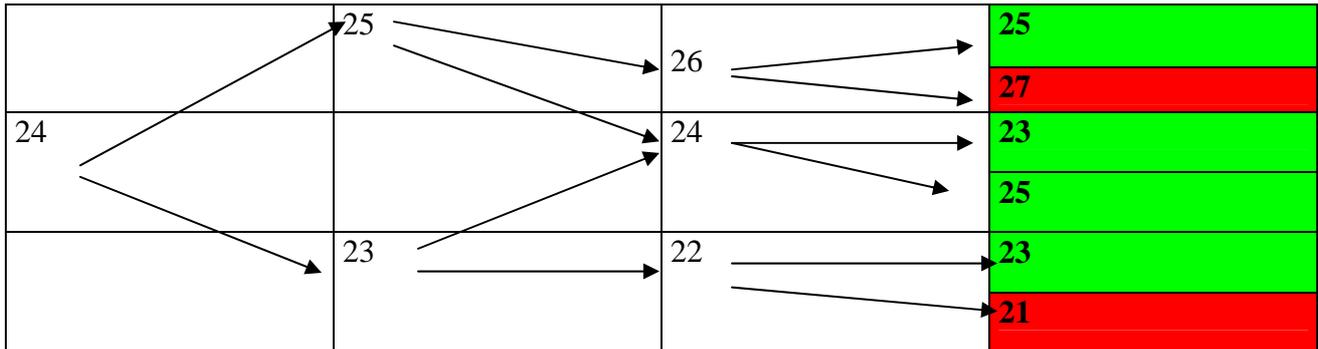
-un nombre pair par 0 .

On a choisi 1 pour un nombre impair car si on effectue une division euclidienne d'un nombre impair par 2 le reste est toujours égal à 1.

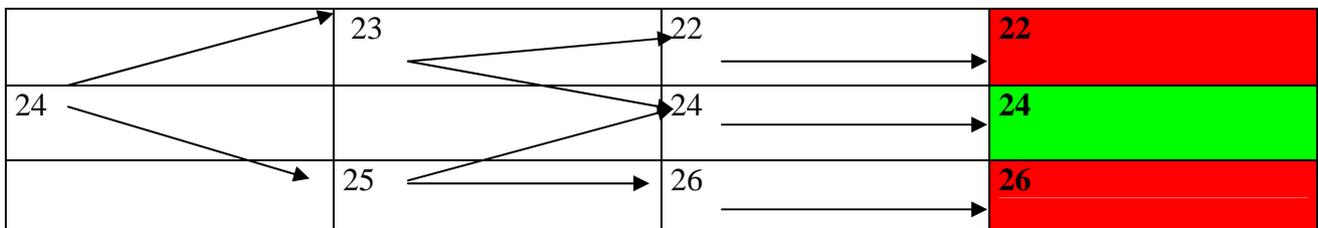
On a choisi 0 pour un nombre pair car si on effectue une division euclidienne d'un nombre pair par 2 le reste est toujours égal à 0.

On utilise ce code pour simplifier les calculs et pour traiter tous les cas possibles.

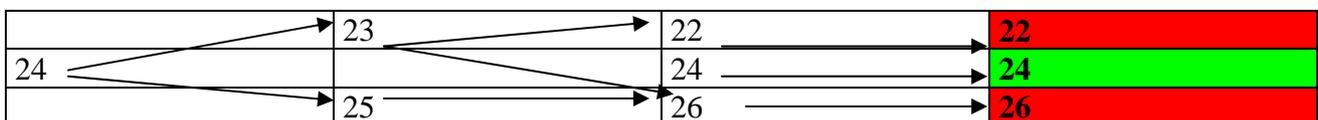
Peut-on obtenir 1,1,1,1?



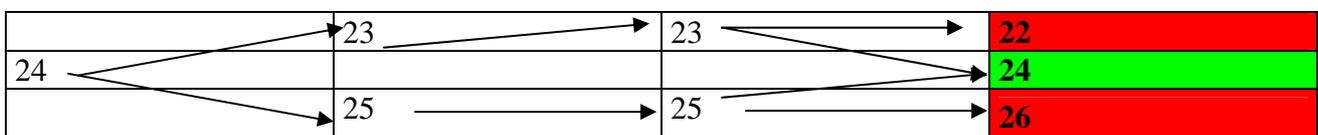
Peut-on obtenir 1,1,1,0 ?



Peut-on obtenir 1 ; 1 ; 0 ; 0 ?



Peut-on obtenir 1 ; 0 ; 1 ; 0 ?



Peut-on obtenir 1 ;0 ;0 ;0 ?

	23	23	23
24			
	25	25	25

Peut-on obtenir 0 ;0 ;0 ;0 ?

24	24	24	24
----	----	----	----

On récapitule:

- 1111 : Possible
- 1110 : Impossible
- 1100 : Possible
- 1010 : Possible
- 1000 : Impossible
- 0000 : Possible

Légendes

Les cases coloriées en fond vert sont celles qui sont justes, car si on prend le dernier nombre et qu'on le soustrait avec le nombre de départ, on doit trouver obligatoirement le nombre voulu soit 1, ou soit 0.

Les cases coloriées en fond rouge sont celles qui sont fausses, car si on prend le dernier nombre et qu'on le soustrait avec le nombre de départ, on doit trouver obligatoirement le nombre non voulu .

Conclusion :

Les nombres pairs et les nombres impairs sont ce qui constitue une partie de la réponse mais nous ne pouvons pas le démontrer.

Les élèves de GERARD PHILIPPE ont fait des recherches en considérant 3, 4, 5, 6, 7 ou 8 nombres de départ.