Le monde tropical et les amibes

année 2013-2014

Amélie CAZETTE, Audrey LAVIGNE, Mathieu RIBES, élèves de terminale S

Encadrés par Alice LE COZ

Lycée Odilon Redon, Pauillac

Chercheur *:* Professeur Alain YGER, Université Bordeaux I

Introduction - L'addition et la multiplication sont des opérations généralement bien connues et considérées comme simples. Changeons les règles du jeu :

- transformons la multiplication classique en addition : $x \otimes y = x + y$.
- transformons l'addition classique en la prise du maximum : $x \oplus y = \max(x; y)$.

Ces nouvelles opérations, entourées, seront appelées les « opérations tropicales » et définissent le « monde tropical ».

C'est un chercheur brésilien - Imre Simon - qui a développé le travail sur ces nouvelles opérations. Le nom de « géométrie tropicale » fait allusion à son pays…

Dans le cadre de MATh.en.Jeans, il nous a été proposé d'étudier le monde tropical. Nous nous sommes alors appuyés sur cette question :
Comment fonctionne la géométrie des droites (ou plus généralement des courbes) dans le monde tropical ?

Voici le plan de notre travail :

I. les règles de calculs

Rappelons que : $\begin{cases} x \otimes y = x + y \\ x \oplus y = \max(x; y) \end{cases}$.

Voici quelques exemples pour mieux comprendre :

Dans le monde « habituel »	Dans le monde tropical
$2 + 1 = 3$	$2 \oplus 1 = \max(2; 1) = 2$
$2 \times 5 = 10$	$2 \otimes 5 = 2 + 5 = 7$

Dans le monde tropical nous pouvons constater qu'il existe également deux éléments neutres différents pour les opérations :

Dans le monde « habituel »	Dans le monde tropical
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x + 0 = x$ L'élément neutre pour l'addition $+$est 0.	Dans $\mathbb{R}$ l'addition tropicale n'admet pas d'élément neutre. Cependant $-\infty$ pourrait jouer ce rôle puisqu'il est plus petit que tous les nombres réels. Plaçons-nous dans le nouvel ensemble $\mathbb{T} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$; alors l'élément neutre pour l'addition $\oplus$ est $-\infty$: $\forall x \in \mathbb{T}, \quad x \oplus (-\infty) = \max(x; -\infty) = x$
$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \times 1 = x$ L'élément neutre pour la multiplication $\times$ est 1	$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \otimes 0 = x + 0 = x$ L'élément neutre pour la multiplication $\otimes$ est 0.

Remarque : dans le monde « habituel » l'opération réciproque de l'addition est la soustraction. Cependant dans le monde tropical, elle n'existe pas.

Regardons maintenant ce que ces modifications entraînent sur les règles de calculs :

	Dans le monde « habituel »	Dans le monde tropical
La commutativité	*Pour l'addition :* $\forall x, y \in \mathbb{R},$ $x + y = y + x$ *Pour la multiplication :* $\forall x, y \in \mathbb{R},$ $x \times y = y \times x$	*Pour l'addition :* $\forall x, y \in \mathbb{R},$ $x \oplus y = \max(x; y) = \max(y; x) = y \oplus x$ *Pour la multiplication :* $\forall x, y \in \mathbb{R},$ $x \otimes y = x + y = y + x = y \otimes x$
La distributivité	$\forall (x, a, b) \in \mathbb{R}^3,$ $x \times (a + b) = x \times a + x \times b$	*Montrons que pour tous réels x, a et b, $x \otimes (a \oplus b) = x \otimes a \oplus x \otimes b$:* $x \otimes (a \oplus b) = x + \max(a; b)$ Et $x \otimes a \oplus x \otimes b = (x + a) \oplus (x + b)$ $= \max(x + a; x + b)$ Si $a \geq b, x \otimes (a \oplus b) = x \otimes a = x + a$ Et $\max(x + a; x + b) = x + a$ De même lorsque $b \geq a$ Donc : $\boxed{\boldsymbol{x \otimes (a \oplus b) = x \otimes a \oplus x \otimes b}}$ (1)

	Dans le monde « habituel »	Dans le monde tropical
L'associativité	$\forall x, y, z \in \mathbb{R}$ $(x+y)+z = x+(y+z)$ $= x+y+z$	Montrons que : $\underline{\forall x; y; z \in \mathbb{R}, (x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)}$ **Si $\boldsymbol{x \geq y}$:** alors $\max(x\,;y) = x$ Ainsi, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus z$ De plus : $x \oplus (y \oplus z) = \max(x\,;\max(y,z))$ $= \max(x\,;y\,;z)$ $= \max(x\,;z) = x \oplus z$ puisque $x \geq y$. Donc : $\boxed{\boldsymbol{x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z}}$ On procèderait de même **pour $\boldsymbol{y \geq x}$** (4)

(2)

Après avoir effectué plusieurs essais, nous avons constaté que certaines formules, comme les identités remarquables, diffèrent.

Notation : on conviendra que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$x^{\boxed{n}} = \underbrace{x \otimes x \otimes \ldots \otimes x}_{\text{n fois...}} \qquad \text{et} \qquad x^0 = 0$$

Nous avons conjecturé puis démontré que pour tous réels a et b et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{(a \oplus b)^{\boxed{n}} = n \times \max(a\,;b)}}$$

Preuve : si $n = 0$ le résultat est trivial. Sinon, pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(a \oplus b)^{\boxed{n}} = \underbrace{(a \oplus b) \otimes (a \oplus b) \otimes \ldots \otimes (a \oplus b)}_{\text{n fois...}}$$
$$= \underbrace{(a \oplus b) + (a \oplus b) + \cdots + (a \oplus b)}_{\text{n fois...}}$$
$$= n \times (a \oplus b)$$

C'est-à-dire, comme attendu : $\boxed{\boldsymbol{(a \oplus b)^{\boxed{n}} = n \times \max(a\,;b)}}$

Cette formule mélange cependant des opérations « habituelles » et tropicales. Nous avons donc cherché une expression « entièrement tropicale », s'apparentant au binôme de Newton du cadre « habituel ». Nous avons obtenu :

$$\boxed{\boldsymbol{\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, \qquad (a \oplus b)^{\boxed{n}} = \bigoplus_{i=0}^{n} \left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)}}$$

Preuve : soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On va raisonner par récurrence.

Notons, pour $n \in \mathbb{N}$: $\quad (\mathcal{P}_n)$: "$(a \oplus b)^{\boxed{n}} = \bigoplus_{i=0}^{n} \left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)$"

Initialisation : pour $n = 0$, on a : $\quad (a \oplus b)^{\boxed{0}} = 0$ par convention,

$$\bigoplus_{i=0}^{0} \left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right) = a^{\boxed{0}} \otimes b^{\boxed{0}} = 0 \otimes 0 = 0$$

Donc : $(a \oplus b)^{\boxed{0}} = \bigoplus_{i=0}^{0} \left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)$ et on a bien vérifié que **$(\boldsymbol{\mathcal{P}_0})$ est vraie**. (3)

Hérédité : supposons que la propriété $(\mathcal{P}_n)$: "$(a \oplus b)^{\boxed{n}} = \bigoplus_{i=0}^{n} \left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)$" est vraie pour un certain entier n.

Alors : $(a \oplus b)^{\boxed{n+1}} = (a \oplus b)^{\boxed{n}} \otimes (a \oplus b) = \left[\bigoplus_{i=0}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)\right] \otimes (a \oplus b)$ d'après $(\mathcal{P}_n)$.

Puis :
$$(a \oplus b)^{\boxed{n+1}} = \left[\bigoplus_{i=0}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)\right] \otimes a \oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)\right] \otimes b$$
$$= \left[\bigoplus_{i=0}^{n}\left(a^{\boxed{i+1}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)\right] \oplus \left[\bigoplus_{i=0}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right]$$
$$\Leftrightarrow \quad (a \oplus b)^{\boxed{n+1}} = \left(\bigoplus_{i=0}^{n-1}\left(a^{\boxed{i+1}} \otimes b^{\boxed{n-i}}\right)\right) \oplus \left(a^{\boxed{n+1}} \otimes b^{\boxed{0}}\right) \oplus \left(a^{\boxed{0}} \otimes b^{\boxed{n+1}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right)$$
$$= \underbrace{\left(\bigoplus_{k=1}^{n}\left(a^{\boxed{k}} \otimes b^{\boxed{n-k+1}}\right)\right)}_{=\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)} \oplus \left(a^{\boxed{n+1}} \otimes b^{\boxed{0}}\right) \oplus \left(a^{\boxed{0}} \otimes b^{\boxed{n+1}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right)$$
$$= \left(a^{\boxed{n+1}} \otimes b^{\boxed{0}}\right) \oplus \left(a^{\boxed{0}} \otimes b^{\boxed{n+1}}\right) \oplus \underbrace{\left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right)}_{=\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)}$$
$$= \left(a^{\boxed{0}} \otimes b^{\boxed{n+1}}\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)\right) \oplus \left(a^{\boxed{n+1}} \otimes b^{\boxed{0}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \quad (a \oplus b)^{\boxed{n+1}} = \bigoplus_{i=0}^{n+1}\left(a^{\boxed{i}} \otimes b^{\boxed{n-i+1}}\right)$$ C'est $(\mathcal{P}_{n+1})$!

Donc la propriété $(\mathcal{P}_n)$ est héréditaire, et par le principe de récurrence, $(\mathcal{P}_n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$:

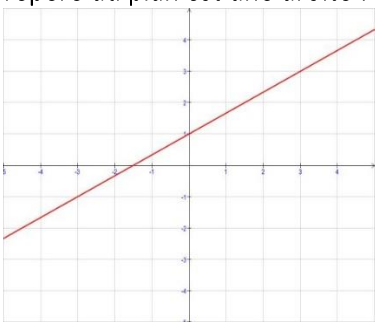
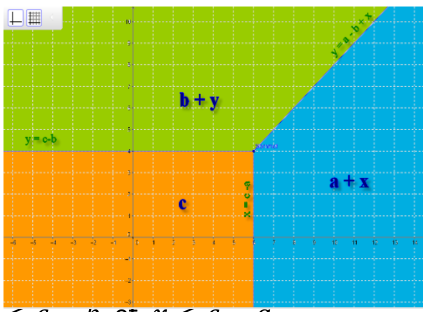
$$\boxed{\forall (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^2, \forall \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}, \qquad (\boldsymbol{a} \oplus \boldsymbol{b})^{\boxed{n}} = \bigoplus_{i=0}^{n}\left(\boldsymbol{a}^{\boxed{i}} \otimes \boldsymbol{b}^{\boxed{n-i}}\right)}$$

(8) (5)

II. Que deviennent les représentations graphiques ?

1) *Les équations cartésiennes de droites dans le plan*

<table>
<tr><th>Dans le monde « habituel »</th><th>Dans le monde tropical</th></tr>
<tr><td>Une équation cartésienne de droite est de la forme :
$a \times x + b \times y + c = 0$

Et sa représentation dans un repère du plan est une droite :
</td>
<td>Une équation de droite est réduite à la forme :
$a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$ c'est-à-dire : $\max(a + x\,; b + y\,; c)$
Il faut déterminer les domaines de prédominance de chaque terme :
• $a + x > b + y \Leftrightarrow y < x + a - b$
• $a + x > c \Leftrightarrow x > c - a$
• $b + y > c \Leftrightarrow y > c - b$


Ainsi, l'expression $a + x$ domine lorsque :
$y < x + a$
De même, l'expression $b + y$ domine lorsque :
$y > c - b$ et $y > a - b + x$.
Et l'expression c domine lorsque : $y < c - b$ et $x < c - a$.
On obtient alors le graphique ci-dessus, avec les domaines de prédominance en couleur, et les « arêtes » qui les délimitent.
Ces « arêtes » constituent une « droite tropicale » !</td></tr>
</table>

Remarque : On a pu constater, que pour tracer une droite tropicale, il suffit de connaître les coordonnées du sommet (point d'intersection des trois demi-droites constituant la « droite tropicale ») (6). En effet, avec la résolution générale faite dans le tableau précédent, on constate que les trois directions d'une droite tropicale sont toujours les mêmes :

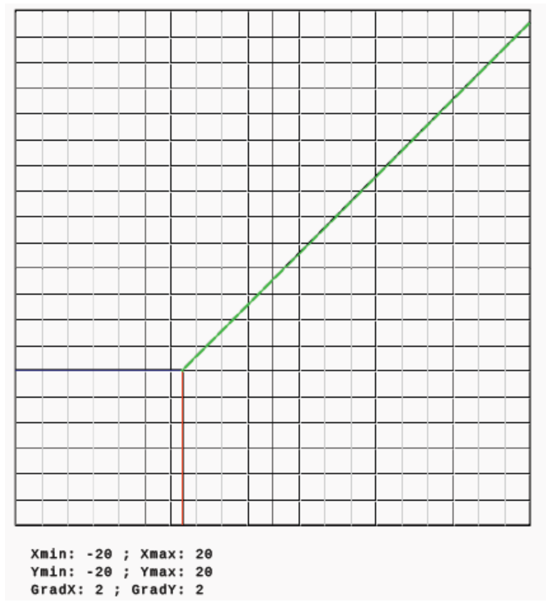
- Une direction verticale et vers le bas ($x = c - a$)
- Une direction horizontale et vers la gauche ($y = c - b$)
- Une direction oblique (coefficient directeur 1) et vers la droite ($y = x + a - b$)

Nous avons implémenté sous *Algobox* un algorithme nous permettant de représenter des droites tropicales dans le plan, à partir des valeurs des coefficients a, b et c de l'équation cartésienne $a \otimes x \oplus b \otimes y \oplus c$.

```
VARIABLES
  a EST_DU_TYPE NOMBRE
  b EST_DU_TYPE NOMBRE
  c EST_DU_TYPE NOMBRE
  Xi EST_DU_TYPE NOMBRE
  Yi EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  LIRE a
  LIRE b
  LIRE c
  Xi PREND_LA_VALEUR c-a
  Yi PREND_LA_VALEUR Xi+a-b
  TRACER_POINT (Xi,Yi)
  TRACER_SEGMENT (Xi,Yi)->(Xi,-20)
  TRACER_SEGMENT (Xi,Yi)->(-20,Yi)
  TRACER_SEGMENT (Xi,Yi)->(20,20+a-b)
FIN_ALGORITHME
```

Les valeurs de Xi et Yi sont les coordonnées du sommet de la droite tropicale.

Pour $a = 3{,}5$, $b = 6$ et $c = -2$, l'algorithme fournit le graphique suivant :



(7)

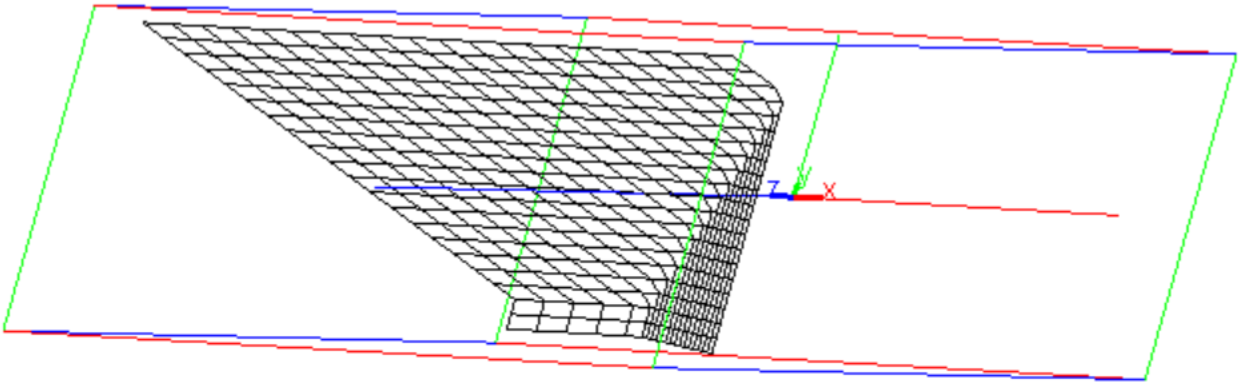
2) *Les équations cartésiennes de droites dans l'espace*

Après avoir représenté des droites tropicales dans le plan, on s'est intéressé à leur représentation dans l'espace. Expliquons cela sur un exemple.
On s'intéresse à la droite représentant la fonction d'expression :

$$F(x, y) = 3{,}5 \otimes x \ \oplus \ 6 \otimes y \ \oplus \ (-2)$$

Dans le monde « habituel » on a donc : $F(x, y) = \max(3{,}5 + x \,;\, 6 + y \,; -2)$.
On va représenter les plans d'équations : $z = 3{,}5 + x$; $z = 6 + y$; $z = -2$, et on va visualiser géométriquement les domaines de prédominance de chacun de ces trois plans. Les intersections de ces trois plans permettent de déterminer la droite tropicale dans l'espace…

Avec le logiciel Xcas, en tapant la commande *plotfunc(max(3.5+x , 6+y , -2) , [x,y])*, on obtient le graphique suivant :



3) Passons au degré supérieur

De la même façon on peut représenter un polynôme de degré supérieur.

Dans le monde « habituel »	**Dans le monde tropical**
Une équation cartésienne est de la forme $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$, avec $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$	$a \otimes x^{\boxed{2}} \oplus b \otimes y^{\boxed{2}} \oplus c \otimes x \otimes y \oplus d \otimes x \oplus e \otimes y \oplus f = \max(a + 2x; b + 2y; c + x + y; d + x; e + y; f)$

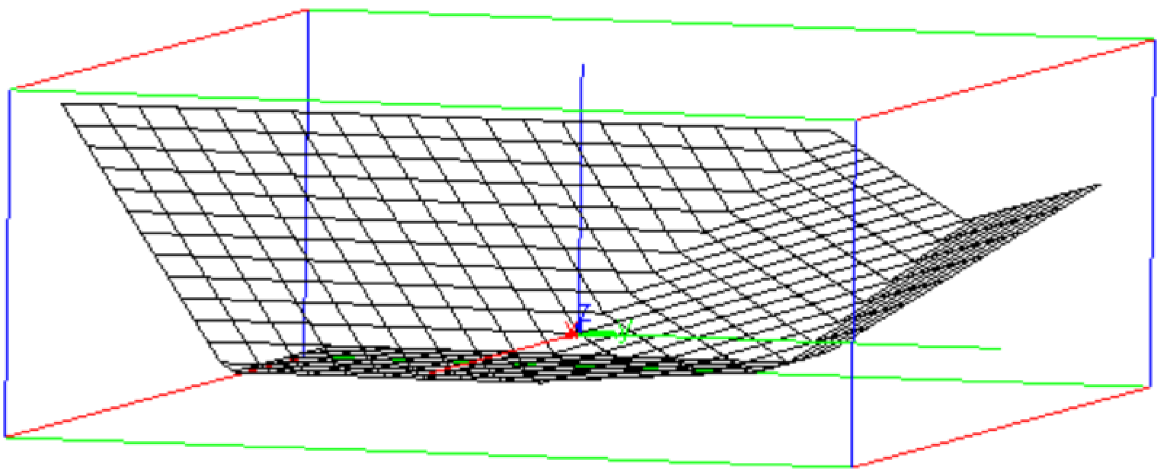
Comment représenter une droite de degré supérieur ? Essayons à l'aide des domaines de prédominance comme précédemment :

Le domaine où $a + 2x$ « domine » doit vérifier les conditions suivantes :	Le domaine où $b + 2y$ « domine » doit vérifier conditions suivantes :
• $a + 2x > b + 2y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y < \frac{a-b}{2} + x}}$ • $a + 2x > c + x + y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y < a - c + x}}$ • $a + 2x > d + x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x > d - a}}$ • $a + 2x > e + y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y < 2x + a - e}}$ • $a + 2x > f \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x > \frac{f-a}{2}}}$	• $b + 2y > a + 2x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y > \frac{a-b}{2} + x}}$ • $b + 2y > c + x + y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y < c - b + x}}$ • $b + 2y > d + x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y > \frac{d-b+x}{2}}}$ • $b + 2y > e + y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y > e - b}}$ • $b + 2y > f \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y > \frac{f-b}{2}}}$

Le domaine où $c+x+y$ « domine » doit vérifier les conditions suivantes : • $c+x+y>a+2x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>a+x-c}}$ • $c+x+y>b+2y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<c-b+x}}$ • $c+x+y>d+x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>c-d}}$ • $c+x+y>e+y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x>e-c}}$ • $c+x+y>f \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>f-c+x}}$	Le domaine où $d+x$ « domine » doit vérifier les conditions suivantes : • $d+x>a+2x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x<d-a}}$ • $d+x>b+2y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<\frac{d-b+x}{2}}}$ • $d+x>c+x+y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<d-c}}$ • $d+x>e+y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<d-e+x}}$ • $d+x>f \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x>f-d}}$
Le domaine où $e+y$ « domine » doit vérifier les conditions suivantes : • $d+y>a+2x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>2x+a-d}}$ • $d+y>b+2y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<d-b}}$ • $d+y>c+x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>c-d+x}}$ • $d+y>e \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>e-d}}$ • $e+y>f \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y>f-e}}$	Le domaine où f « domine » doit vérifier les conditions suivantes : • $f>a+2x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x<\frac{f-a}{2}}}$ • $f>b+2y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<\frac{f-b}{2}}}$ • $f>c+x+y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<f-c-x}}$ • $f>d+x \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{x<f-d}}$ • $f>e+y \Leftrightarrow \boxed{\boldsymbol{y<f-e}}$

Ces inégalités – nombreuses - ne sont pas aisées à confronter « à la main », sauf dans des cas particuliers conduisant à des simplifications et à la représentation effective de moins de domaines de prédominance…

<u>Exemple :</u> à l'aide du logiciel *Xcas* , pour $F(x,y) = x^{\boxed{2}} \oplus (-10) \otimes y^{\boxed{2}} \oplus x \otimes y \oplus (-5)$, on obtient la représentation ci-dessous, sur laquelle on ne voit plus apparaître seulement trois plans représentant les domaines de prédominance mais quatre…



On a saisi la commande : *plotfunc(max(2x , -10+2y , x+y , -5) , [x,y])*…

Conclusion :

Nous avons appris beaucoup de choses en faisant ce travail, sur la Géométrie Tropicale comme sur les Mathématiques plus généralement. Les règles et propriétés de calcul, la représentation de fonctions dépendent de la façon dont on définit les opérations…
Nous n'avons pas pu établir d'algorithme général de tracé d'une représentation de polynôme tropical de degré 2 ou plus faute de temps, et aimerions nous y intéresser à l'avenir…

Notes d'édition

(1) Il s'agit ici de la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.

(2) Les auteurs ont vérifié l'associativité de l'addition tropicale, mais n'ont rien mentionné à propos de l'associativité de la multiplication tropicale : cette dernière associativité est évidente puisqu'elle résulte de l'associativité de l'addition dans le monde habituel.

(3) Pour détailler l'initialisation, en allant jusqu'au bout, il faut écrire $0 \otimes 0 = 0 + 0 = 0$

(4) L'associativité de l'addition tropicale repose sur l'égalité suivante $\max(\max(x, y), z) = \max(x, \max(y, z))$ puisque ces deux quantités sont égales à $\max(x, y, z)$.

(5) La clé de la démonstration réside dans l'égalité $x \oplus x = x\ pour\ tout\ x\ dans\ \mathbf{R}$. Egalité évidente puisque $\max(x, x) = x\ pour\ tout\ x\ dans\ \mathbf{R}$.

(6) Les coordonnées de ce sommet sont $(c - a, c - b)$.

(7) On voit apparaître dans ce programme Algobox le nombre 20. On peut remplacer 20 par un paramètre variable. En effet si on prend $c = 0, a > 20\ et\ b > 20$ alors $c - a < -20; c - b < -20$ et, dans le programme ci-dessus écrit par les auteurs, on ne verra pas le sommet dans la fenêtre.

(8) Il y a une autre formule : $(a \oplus b)^{\boxed{n}} = a^{\boxed{n}} \otimes b^{\boxed{n}}$. En effet d'une part $(a \oplus b)^{\boxed{n}} = n \max(a, b)$. D'autre part $a^{\boxed{n}} \otimes b^{\boxed{n}} = \max(na, nb) = n \max(a, b)$. Les deux expressions sont égales. On peut vérifier facilement cette propriété pour $n = 2$.