Les maths ça nous “boîtes” !

Année 2017 - 2018

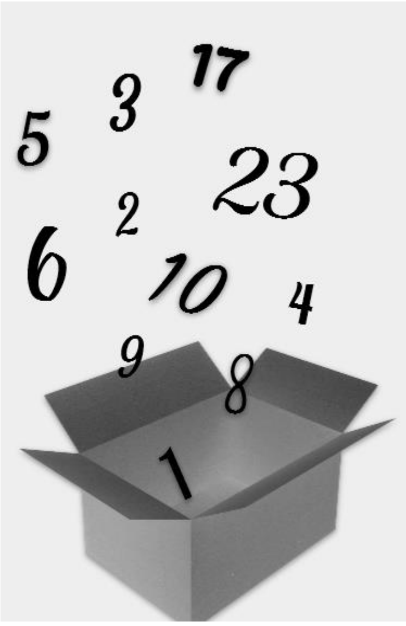
Elèves :

- Lùna SARANTELLIS (Term S)
- Tom LENORMAND (Term S)
- Paul LACOMBE (Term S)
- Baptiste GRATENS (2de)

Encadrés par Christine DELMAIRE, professeur de mathématiques

Établissement : Lycée de la mer, Gujan-Mestras (33)

Chercheur : Éric SOPENA, chercheur au LaBRI à Talence (33)



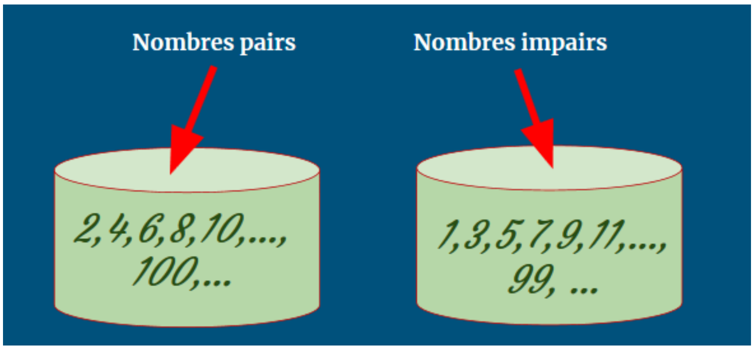
INTRODUCTION

On définit un ensemble E d’entiers naturels qu’on appellera conditions, on veut classer les entiers naturels de 1 à l’infini dans des boîtes sachant que deux entiers naturels x et y sont incompatibles (c’est-à-dire ne peuvent pas être rangés dans la même boîte) si $|x – y|$ appartient à l’ensemble E.
Par exemple, si E = {1}, alors 8 et 9 sont incompatibles car 9 – 8 = 1, alors que 2 et 5 sont compatibles.
Notre but est de trouver le nombre minimum de boîtes nécessaires pour ranger tous les entiers naturels vérifiant les conditions définies par l’ensemble E, selon différentes formes de cet ensemble.

Nos recherches nous ont amenés à trouver en premier une méthode qui nous donne le nombre maximum de boîtes. Ensuite nous nous sommes intéressés à des ensembles particuliers :

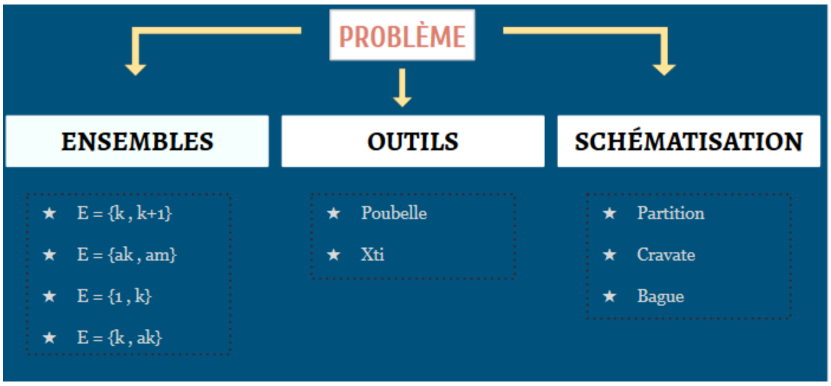
$$E = \{k ; k+1\}, E = \{ak ; am\}, E = \{1 ; k\} \text{ et } E = \{k ; ak\},$$

a, k, m étant des entiers naturels, et nous avons trouvé une stratégie pour réduire le nombre de boîtes nécessaires dans chacun de ces cas.
Notre première recherche a été pour l'ensemble E = {1}.
Dans l'exemple précédent, on a vu que 8 et 9 étaient incompatibles mais pas 2 et 5.
On peut donc en déduire que deux boîtes suffisent avec cette condition, pour ranger tous les nombres entiers naturels : une qui contient les nombres pairs et l'autre les nombres impairs.



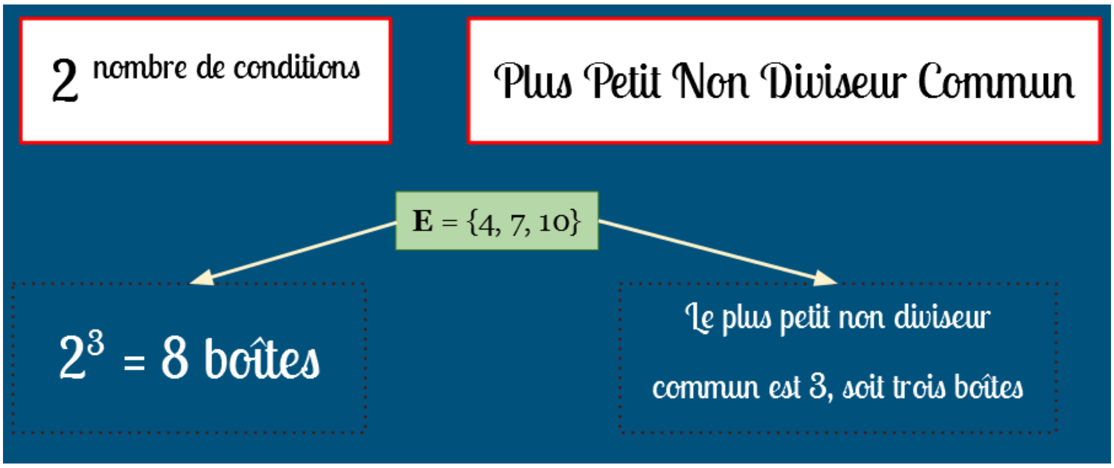
I- CHEMINS DE RECHERCHE

On a tout d'abord essayé de trier les entiers naturels avec des conditions déterminées au hasard, pour trouver certaines similarités ou cas particuliers dans le nombre de boîtes. On a donc pu déterminer certaines règles pour des ensembles particuliers. Ensuite, nos multiples essais nous ont conduits à certaines règles plus générales que l'on appellera « outils », et qui nous ont servi à trouver d'autres cas particuliers. Enfin, notre dernier axe de recherche était lié à une dimension visuelle : nous cherchions des représentations différentes pour trier, des notations pour simplifier le problème, etc.



II- OUTILS

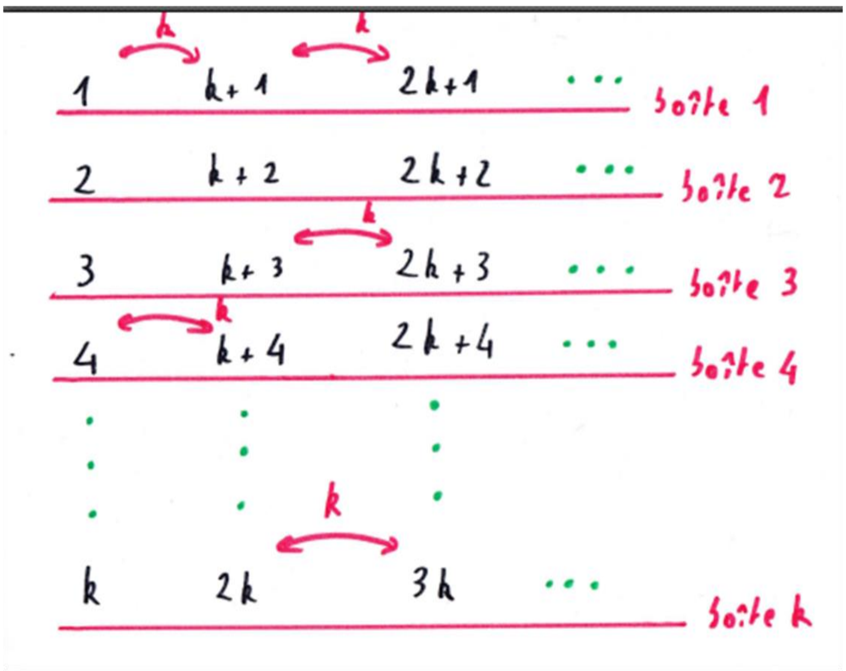
Après un très grand nombre d'essais, nous pouvions apercevoir le début de deux règles générales permettant de dégrossir fortement le nombre de boîtes pour un très grand nombre de conditions : les « méthodes des maxima ».



La méthode la plus efficace est la méthode du PPNDC (Plus Petit Non Diviseur Commun) (1) : si on a un très grand nombre de conditions, il nous suffit de trouver le plus petit non diviseur commun de ces conditions, et ce sera le nombre de boîtes maximum. Bien sûr, le nombre de boîtes peut être inférieur au résultat obtenu, dans des cas particuliers, mais cette méthode est bien utile pour réduire le nombre maximum de boîtes.
Par exemple, si toutes nos conditions sont impaires, on peut d'ores et déjà affirmer que deux boîtes suffisent.

Démonstration de la méthode du PPNDC :

Prenons un nombre très grand de conditions : E = {a, b, c, … x, y}
Soit k un entier naturel.
Nous partons du fait que k ne divise aucune des conditions de notre ensemble.
Classons les entiers naturels, chaque ligne représentant une boîte :



(2)

On veut que la différence entre les entiers naturels soit différente de {a, b, c, … x, y} dans une même boîte.

Il est évident que, avec ce tri, dans une boîte, la différence entre deux entiers naturels sera toujours un multiple de k.

Or, nos conditions ne sont pas divisibles par k, donc divisibles par aucun multiple de k.
Donc, dans une même boîte, la différence entre deux entiers ne sera jamais égale à a, b, c, x, ou y, elle sera égale à un multiple de k.

III- ENSEMBLES PARTICULIERS

En se servant des outils précédemment présentés, nous avons abouti à certains cas particuliers.

a) E = {k, k+1}

Nous observons que pour un ensemble E = {k, k+1}, grâce à la méthode du PPDNC, on peut trier nos entiers d'une certaine façon, comme dans l'exemple ci-dessous.

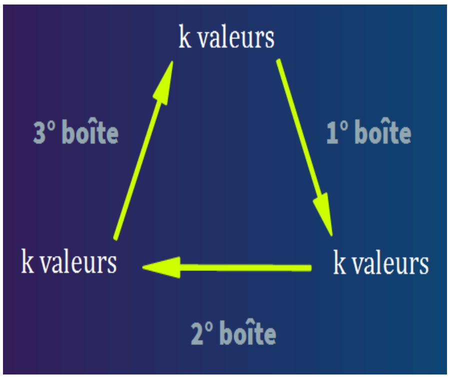
E = {6, 7}

0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 18 ; 19 ; 20 ; 21 ; 22 ; 23 ; 36…	6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 24 ; 25 ; 26 ; 27 ; 28 ; 29	12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 30 ; 31 ; 32 ; 33 ; 34 ; 35

Pour cette condition nous avons besoin de trois boîtes :

- 0 est incompatible avec 6 car 6 – 0 = 6 donc on doit prendre une deuxième boîte.
- 12 est incompatible avec 5 et 6 car 12 – 5 = 7 et 12 – 6 = 6 c'est pourquoi il nous faut une troisième boîte.

On observe un cycle qui se renouvelle pour toute valeur k, PPNDC de nos conditions :



(3)

b) E = {k, m}, et E = {ak, am}, a ≥ 1

Nous avons cherché une représentation schématique des boîtes pour ce type d'ensemble. Dans cette représentation, que l'on nommera « partition », chaque ligne correspond à une boîte. Le nombre maximal de boîtes correspond donc au nombre maximal de lignes.
On propose une solution pour E = {k, m} qui se généralise aux ensembles E = {ak, am} en utilisant le même nombre de boîtes.

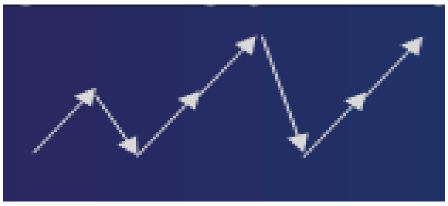
Pour des conditions où nous avons besoin de 3 boîtes :

On remarque que 1 x 2 = 2 et 4 x 2 = 8 donc, avec a = 2, la solution pour E = {2, 8} utilisera le même nombre de boîtes que la solution pour E = {1, 4} :

E = {1, 4}

E = {2, 8}

On retrouve à chaque fois un cycle et un schéma logique où le nombre de points par ligne est multiplié par a.



(4)

CONCLUSION

Résultats : La loi du Plus Petit Non Diviseur Commun reste la plus efficace et permet de résoudre le problème pour un très grand nombre de conditions. Les recherches sur une notation particulière n'ont pas été concluantes. Enfin la représentation schématique présentée ci-dessus (« la partition »), est une méthode qui mérite d'être étudiée plus en profondeur, pour voir dans quelle mesure elle peut donner des résultats intéressants.

Ce problème mathématique peut être appliqué à la vie réelle dans n'importe quelle situation où ce que l'on veut trier contient des incompatibilités. Par exemple, pour transporter des produits chimiques incompatibles entre eux, combien faudra-t-il de camions ?

Notes d’édition

(1) Le PPNDC est le plus petit entier ne divisant aucun des termes de E.

(2) Dans le dessin ci-dessus, il est dommage de regarder une boite numéro k, vu que la lettre k désigne déjà quelque chose.
On peut aussi constater que le nombre de boites est majoré par k.

(3) Le dessin est incompréhensible. Le ppncd de 6 et 7 n'est pas 6, or dans l'exemple en rouge on prend k = 6.

(4) Ici encore, les schémas auraient nécessité une explication.