Les nombres permutables et les nombres qui tournent

SANCHEZ Carole, CLERET-ITH Mélody, TETART Antoine, HAMID Basma,

Lycée du Parc Des Loges, Évry.
Enseignants : LAVENAS Mireille, COGIS Élisabeth, BOSC-BIERNE Christine, CALUS Denis, CHARIGNON Cyril, WAUQUIEZ Mathieu et SAINT-GILLE. Christian
Chercheur : CHARBONNIER Camille (Doctorante, Laboratoire Statistique et Génome)

Sujet :

Le nombre 142857 a une propriété exceptionnelle :

Quand on forme ses 6 permutations circulaires (à savoir 142857, 428571, 285714, 857142, 571428 et 714285), ces 6 nombres obtenus sont multiples de 142857.

En effet :

142857 = 1 × 142857

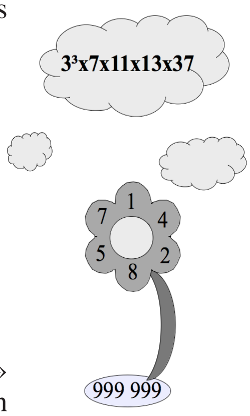
428571 = 3 × 142857

285714 = 2 × 142857

857142 = 6 × 142857

571428 = 4 × 142857

714285 = 5 × 142857



Si on appelle : « 6-permutables » ou « permutable à 6 chiffres » un tel nombre ; on en cherchera d'autres ; « 5-permutables » ou « 7-... .permutables», etc.

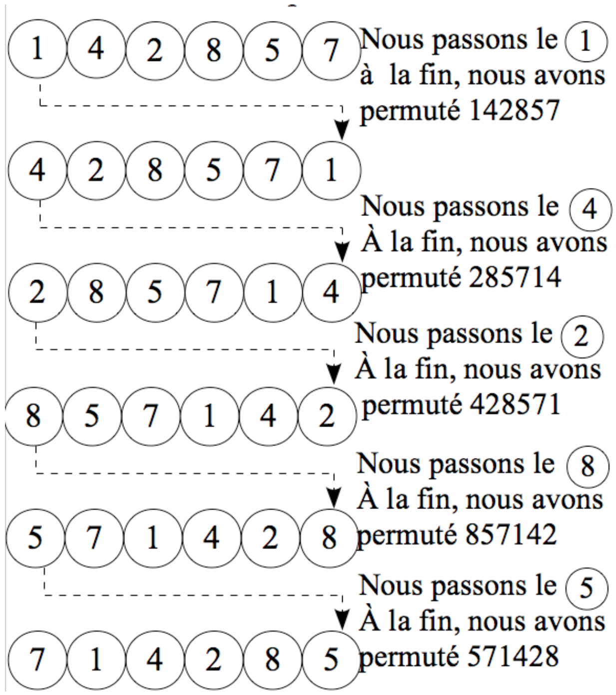
Mots-clés :

Nombre, permutable, diviseur, permutation circulaire

Premières recherches

Nous avons commencé nos recherches par des découvertes sur le nombre donné en exemple dans le sujet, puis par la découverte d'autres nombres similaires à celui-ci et enfin exploré des nombres « 5-permutables », « 7-permutables » ...

Voici un schéma des permutations de 142857:



Quelques caractéristiques de 142857 :

999 999 / 7 = 142857

999 × 143 = 142857

142 + 857 = 999

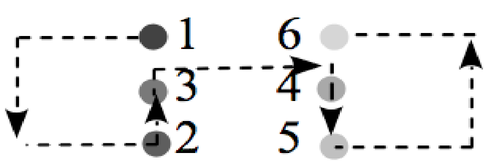
1+4+2+8+5+7= 27 et 2+7= 9

14 + 28 + 57 = 99

? Les multiplicateurs qui font tourner le nombre magique forment [en les associant] la somme de sept :

Ces six multiplicateurs sont inférieurs à 7.

Le schéma suivant montre par des flèches le «clés-ordre» d'apparition des multiplicateurs qui font « tourner » le nombre « magique » :



[...]

Pour finir, nous avons observé que les chiffres du nombre « magique » [sont des] produits [remarquables] :

444 × 333 = 147 852
333 × 777 = 258741
666 × 777 = 517482
36963 × 4 = 147852
36963 × 7 = 258741
36963 × 14 = 517482
[note : on a aussi 333 × 111 = 36963]

Ce sont ces nombreuses caractéristiques qui nous l'on fait baptiser « *nombre magique* ».

Première Méthode pour trouver un nombre qui tourne :

Nous nous sommes demandé s'il existait d'autres nombres « 6-permutables » en essayant de trouver des moyens de créer d'autres nombres « 6-permutables ».

• Le chiffre 9 apparaissait souvent depuis le début de notre travail. Nous avons donc pris le plus grand nombre à 6 chiffres existant soit

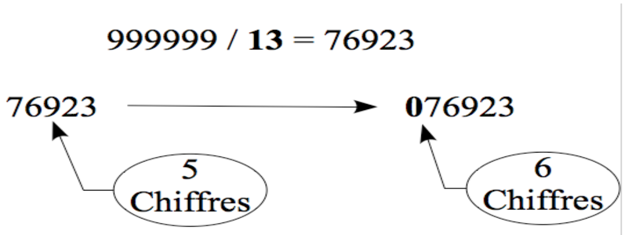
« 999 999 ».

• Nous avons divisé « 999 999 » par tous les nombres de 0 à 500.

Parmi ces résultats, nous n'avons gardé que les nombres entiers de 5 ou 6 chiffres.

• Pour un nombre à 5 chiffres nous avons écrit un 0 à gauche du nombre, le transformant en un nombre à 6 chiffres. [plutôt un «mot», puisque 012345 ≠ 12345]

Voici un exemple :



Ensuite, voici comment nous procédons pour voir si le nombre « tourne » comme dans le « nombre magique ».

D'abord, nous faisons permuter notre nombre à 6 chiffres :

076923

76923**0**

6923**07**

923**0**76

23**0**769

3**0**7692

Puis nous cherchons les multiplicateurs de ces permutations par rapport à notre nombre initial ici « 076923 ».

Donc :

7692**3**0 / **0**76923 = **10** ;

6923**07** / **0**76923 = **9** ; etc.

Jusqu'à obtenir ceci :

076923 = 1 × 076923
769230 = 10 × 076923
692307 = 9 × 076923
923076 = 12 × 076923
230769 = 3 × 076923
307692 = 4 × 076923

Donc, 076923 est un nombre qui « tourne ».

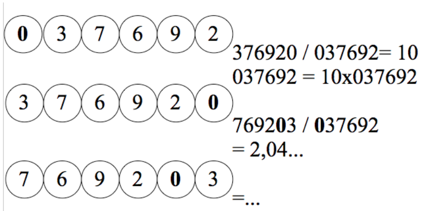
Les nombres « 1, 10, 9, 12, 3, et 4 » font tourner le nombre ci-dessus. Ces nombres sont inférieurs à 13 !

Remarque : Depuis le début de nos recherches les diviseurs (7 et 13) de 999 999 qui ont généré deux nombres qui tournent sont des **nombres premiers**.
[note : ce ne sera plus le cas dans la suite]

Autre exemple

Prenons cette fois un nombre entier au hasard : 37692

Il devient **0**37692 afin d'obtenir un nombre à 6 chiffres.



2,04... [~~est un nombre~~ a un développement] décimal illimité.

Donc le nombre **0**37692 *ne tourne pas* !

Voici les nombres qui « tournent » [6-permutables ? magiques ?]]issus de nos divisions de 999 999 par les nombres de 1 à 500

999 999 / 3 = 333333
999 999 / **9** = 111111
999 999 / 13 = **0**76923
999 999 / **21** = **0**47619
999 999 / **27** = **0**37037
999 999 / **33** = **0**30303
999 999 / 37 = **0**27027
999 999 / 39 = **0**25641
999 999 / 77 = **0**12987

Mais aussi en partant du nombre 142857

142857 / 13 = **0**10989

Nous avons essayé aussi avec des produits de 999999 comme nombre à diviser :

2999997 / 21 = 142857
5999994 / 21 = 285714
8999991 / 21 = 428571

Le nombre 1999998 / 13 = 153846 ne tourne qu'avec des multiples décimaux.

153846 = 153846 x 1
538461 = 153846 x **3,5**
384615 = 153846 x **2,5**
846153 = 153846 x **5,5**
461538 = 153846 x 3
615384 = 153846 x 4

Nous constatons que tous ces nombres qui tournent ont des caractéristiques en commun avec le nombre magique, 142857.

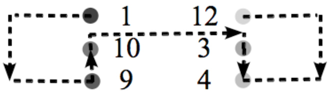
Exemple : le nombre 076923

Si on additionne le 1er avec le 4ème chiffre du nombre, 2ème avec le 5ème et le 3ème avec le 6ème, on obtient toujours 9 : 076+923=999

La somme des multiplicateurs donne 13.

1 + 12 = 13
10 + 3 = 13
9 + 4 = 13

Le schéma suivant montre par des flèches l'ordre d'apparition des multiplicateurs qui font « tourner » le nombre :



Seconde méthode pour faire «tourner» un nombre.

Formule : Soit A, un nombre entier de 6 chiffres et soit *a* son premier chiffre.

$(A \times 10) - (a \times 999\,999)$

Exemple avec un nombre A pris au hasard :

$(456123 \times 10) - (4 \times 999\,999) = 561234$

$(561234 \times 10) - (5 \times 999\,999) = 612345$

$(612345 \times 10) - (6 \times 999\,999) = 123456$

$(123456 \times 10) - (1 \times 999\,999) = 234561$

$(234561 \times 10) - (2 \times 999\,999) = 345612$

$(345612 \times 10) - (3 \times 999\,999) = 456123$

456123 tourne avec cette méthode, [ainsi que tous les nombres à 6 chiffres].

La différence observée est que certains nombres ne « tournent » pas comme dans la première méthode, c'est à dire qu'ils ne sont pas des diviseurs de 999 999.

Exemple :

999 999 / 13 = 076923

$(076923 \times 10) - (0 \times 999\,999) = 076923$

etc.

Ce nombre qui tourne avec la méthode du « nombre magique », ne tourne pas avec la seconde méthode : sans doute parce que nous avons dû écrire un zéro à gauche pour le transformer en « six-permutable ».

Cependant si nous enlevons le 0, nous obtenons un nombre [~~5-permutable~~ qui «tourne» avec la seconde méthode :

$76923 \times 10 - 7 \times 99999 = 69237$]

Cette méthode nous paraît moins performante.

Dernières recherches

Nous avons décomposé le nombre 999999 en facteurs premiers, soit :

$999999 = 3^3 \times 7 \times 11 \times 13 \times 37$

Nos travaux avaient fait apparaître dans le désordre le rôle de certains diviseurs de 999 999. En premier 7, puis 13 , 21 etc. Après sa décomposition en facteurs premiers nous constatons que ces diviseurs sont identiques aux produits de certains d'entre eux !

Conclusion

Nous avons exploré de façon succincte les nombres 3, 4, 5, 7-permutables.

Pour cela nous avons décomposé en facteurs premiers 999, 9999, 99999 et 9999999 et utilisé nos deux pistes de travail.

Nous n'avons rien trouvé de semblable à nos résultats pour la première méthode [...].

Nous nous demandons donc s'il existe des nombres, « 4-permutables » « 5-permutables », « 7-permutables » [~~avec la méthode~~ selon la définition] du sujet (méthode n°1)...

***