Les ombres chinoises

BAUDOIN Alexis (5ème) LEWONCZUK Louise (4ème), SOURDON Jérôme (4ème), CROS Baptiste (3ème), PEYROUSE Robin (3ème), RICHARD Célia (3ème)
et
BAUDOIN Clément (2de), GALLIERE Anaïs (2de), REDA Clémence (2de), JACOBS Anaïs (1èreS)

Collège Bernard de Ventadour et Lycée Albert Einstein de Bagnols sur Cèze

Enseignants : BUFFET Gaëlle, LACOUSSE Véronique et CHARDENON Annabel

Chercheur : FRIZON Fabien, CEA Marcoule

Sujet

Les ombres formées par un objet suivant trois directions orthogonales sont des disques.

• Quelle peut être la forme de cet objet ?

• Quel objet utilise le moins de matière ?

Mots-clés

OMBRE, CERCLE, SPHÈRE, CÔNE, SURFACE MINIMALE

Introduction

La recherche des réponses à ces questions s'est faite par deux approches différentes :

• Démarche expérimentale par les collégiens ;

• Modélisation mathématique par les lycéens.

Deux solutions évidentes ont rapidement été trouvées :

• La sphère (plutôt que la boule pour qu'il y ait moins de matière) ;

? • Trois disques identiques imbriqués suivant les trois directions orthogonales. [Note : Les trois disques n'ont pas même centre à moins que les sources de lumière ne soient placées à l'infini. Il s'agit en fait des trois disques délimités par les trois lignes séparatrices ombre-lumière]

Pour déterminer lequel des deux objets utilise le moins de matière, on compare leurs aires :

? $3\pi\, r^2 \langle 4\,\pi\, r^2$

Ainsi, des solutions au problème posé existent, il reste à essayer d'en déterminer de plus performantes.

La recherche d'autres solutions nécessite de préciser le cadre de travail et de fixer certaines contraintes :

• Ni le solide, ni la source de lumière ne peut bouger ;

• La source de lumière est ponctuelle ;

• Les disques [ombres] ont le même rayon.

Vers une mathématisation du problème

En s'appuyant sur ces choix, les faisceaux de lumière sont représentés par des cônes identiques de hauteur h et de rayon R.

*L'**hypothèse principale de travail** est que, pour qu'un objet ait une ombre en forme de disque selon trois directions orthogonales, il doit être tangent à l'intersection des trois cônes.*

Le théorème de Thalès et le théorème de Pythagore permettent d'écrire l'équation des trois cônes dans le repère choisi [voir figure 2 : Les cônes choisis sont tangents à une même sphère de rayon $r = \frac{R}{2}\frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}$] :

Pour trouver l'intersection des trois cônes, il faudrait résoudre le système suivant :

$$(i)\quad \begin{cases} x^2 + y^2 = \dfrac{R^2}{h^2}(h-z)^2 \\ 0 \le z \le h \end{cases}$$

$$(ii)\quad \begin{cases} x^2 + \left(z - \dfrac{h}{2}\right)^2 = \dfrac{R^2}{h^2}\left(\dfrac{h}{2} - y\right)^2 \\ -\dfrac{h}{2} \le y \le \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

$$(iii)\quad \begin{cases} y^2 + \left(z - \dfrac{h}{2}\right)^2 = \dfrac{R^2}{h^2}\left(\dfrac{h}{2} + x\right)^2 \\ -\dfrac{h}{2} \le x \le \dfrac{h}{2} \end{cases}$$

Face aux difficultés rencontrées ; dans un premier temps, l'intersection de deux cônes seulement va être déterminée.

Intersection de deux cônes

Les équations (i) et (ii) constituent un système qui permet de trouver l'intersection des «cônes en z et en y». L'élimination de x^2 en faisant (i)-(ii), puis une factorisation des termes en y et en z conduisent à l'équation :

$$\left(y-\frac{hR^2}{2(h^2+R^2)}\right)^2-\left(z-\frac{h(h^2+2R^2)}{2(h^2+R^2)}\right)^2=0$$

Cette équation donne deux solutions :

[Ces équations sont celles de deux plans qui contiennent l'intersection des cônes]. On obtient les

$$z=y+\frac{h}{2} \quad \text{ou} \quad z=-y+\frac{h}{2}+\frac{hR^2}{h^2+R^2}$$

équations de deux ellipses en substituant ces deux expressions dans (i) ou (ii) :

$$\frac{x^2}{\frac{h^2R^2}{4(h^2-R^2)}}+\frac{\left(y+\frac{hR^2}{2(h^2-R^2)}\right)^2}{\frac{h^4R^2}{4(h^2-R^2)^2}}=1$$

$$\text{et} \quad \frac{x^2}{\frac{h^2R^2(h^2-R^2)}{4(h^2+R^2)^2}}+\frac{\left(y-\frac{hR^2}{2(h^2+R^2)}\right)^2}{\frac{h^4R^2}{4(h^2+R^2)^2}}=1$$

[Disque et ellipse]

La recherche expérimentale a également permis de conjecturer que l'intersection de deux cônes [isométriques, dont les axes sont orthogonaux et concourent à mi-hauteur] est une ellipse ; un nouvel objet a alors été mis en évidence : *un disque imbriqué avec une ellipse inclinée* (Figure 1).

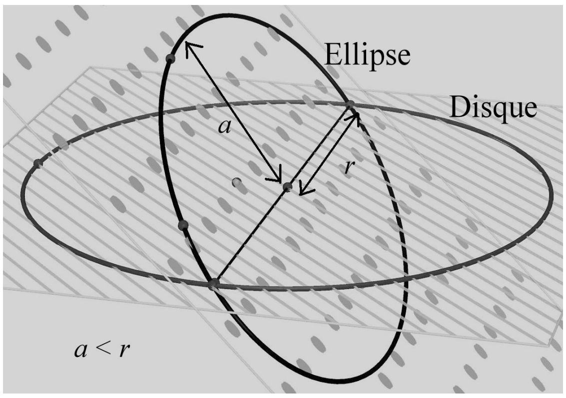

Figure 1. Un autre objet répondant [apparemment] au problème : ellipse et disque imbriqués.

En vérifiant expérimentalement, il semble que cet objet a pour ombre un disque suivant trois directions orthogonales. [A condition que les sources de lumière soient très loin, que l'on accepte des diamètres différents et que l'on néglige les morceaux d'ombres réduits à un segment]

Afin d'envisager quel objet utilise le moins de matière, les aires des objets trouvés sont comparées :

$$\pi r(a+r) < 3\pi r^2 < 4\pi r^2$$

Où r est le rayon des disques et de la sphère ; $2r$ est le grand axe et $2a$ le petit axe de l'ellipse.

Les trois disques imbriqués donnent donc une solution qui répond à la première question et qui utilise moins de matière que la sphère ; mais le dernier objet trouvé utilise encore moins de matière.

Intersection de trois cônes

L'objet à déterminer doit être tangent aux trois cônes, c'est-à-dire qu'il faut introduire le «cône en x» aux raisonnements menés précédemment uniquement sur les « cônes en z et en y».

L'objet recherché doit être tangent en huit points aux trois cônes visibles sur la représentation suivante (Figure 2) :

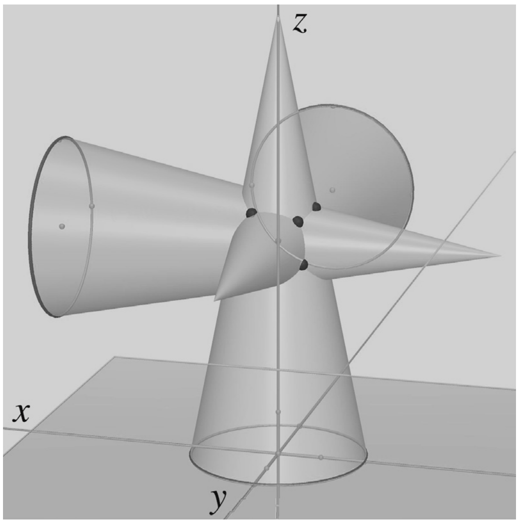

Figure 2 : intersection des 3 cônes orthogonaux.

Conclusions et perspectives

Par une démarche expérimentale, les collégiens ont trouvé, par intuition, un objet «disque + ellipse» qui semble répondre au problème.

Par un raisonnement mathématique, les lycéens ont trouvé des conditions sur un objet qui pourrait répondre à la première question, sans pouvoir le décrire précisément.

Ainsi, une réponse a été proposée, mais le problème n'est pas résolu : l'inclinaison entre le disque et l'ellipse doit être précisée et il est peut-être encore possible de trouver un nouvel objet qui utilise moins de matière. De plus, un lien direct doit encore être établi entre les résultats expérimentaux et les résultats théoriques.

[**Note.** En fait, il s'avère que l'hypothèse de travail aboutit à des résultats contradictoires dès lors que les sources de lumière sont à distance finie.]

***