

# Les sudokus

MALBET Agath, MANGIN Camille ;Nicolas  
CHESNEY, CHEVALLIER Loïc, LOMENECH  
Guillaume, MOUNIER Quentin, PICARD Mathilde,  
WEYMANN Gilles,  
4ème et 3ème

Collège Le Chamandier, Gières.  
Collège Fantin-Latour, Grenoble.  
Enseignants : M.CELLIER, M. LEBRUN, M.  
DUGAST  
Chercheurs : Mme McLEAN, M. DUMAS

## Le 4x4

On part d'une grille de 4 zones appelées régions, divisées en 4 cases.

Nous avons trouvé le nombre de possibilités pour remplir la première région, en plaçant les chiffres de 1 à 4 dans la première case, ce qui nous fait 4 possibilités pour la remplir; ensuite, nous sommes passés à la case n°2, où il n'y a plus que 3 possibilités ; puis la case n°3, où l'on a plus que deux chiffres, donc 2 possibilités; et enfin la case n°4 où il n'y a plus qu'un chiffre donc une seule possibilité. Nous avons  $4 \times 3 \times 2 \times 1$ , appelé factorielle de 4 et noté  $4!$ , soit 24 possibilités.

Nous avons donc bloqué cette région pour compléter le reste de la grille. Nous avons rempli toutes les grilles à partir de la cette 1ere région. Nous avons remarqué qu'il y avait 12 grilles possibles.

Cela s'est confirmé lors de nos essais suivants: Lorsque l'on remplit la 2eme région, les deux chiffres de la première ligne de la 1ère région passent sur la 2ème ligne de la 2ème région.

? Dans les deux 1ères lignes de la figure 1a, on retrouve les chiffres dans leurs positions initiales: on a alors 4 grilles possibles.

Dans les deux 1ères lignes de la figure 1b, on remarque les chiffres ont été inversés ( les 1 deviennent des 2 ; les 3 des 4 et vice versa): on a 4 grilles possibles.

Dans les deux 1ères lignes des figures 1c et 1d, seulement 1 doublet est inversé : on a [dans chaque cas] 2 grilles possibles.

1	2	4	3
4	3	1	2
2	1	3	4
3	4	2	1

1	2	3	4
4	3	2	1
3	1	4	2
2	4	1	3

figure 1a et figure 1b

1	2	4	3
4	3	2	1
3	1		
2	4		

1	2	3	4
4	3	1	2
3	1		
2	4		

figure 1c et figure 1d

## Sujet

Le sudoku est un jeu. Le 9x9 est le sudoku dit « classique ». On part d'une grille de 9 zones appelées régions, divisées en 9 cases. Le principe de ce jeu est de remplir la grille avec les chiffres de 1 à 9, chaque région, colonne et ligne contenant une seule fois chaque chiffre.

Notre sujet était de trouver le nombre exact ou approximatif de grilles de sudokus déjà remplies.

## Mots-clés

GRILLE, SUDOKU, DÉNOMBREMENT, PERMUTATION, FACTORIELLE

Sachant que si la première région est définie, il reste 12 possibilités de remplissage de grille, qu'il y a 24 possibilités de remplissage de la région n°1, et que  $24 \times 12 = 288$ , **il y a donc 288 possibilités de remplissage de la grille 4x4.**

### Le 9x9

Le système de numérotation est le même pour les cases et les régions. Il est indiqué figure 2., ci-dessous.

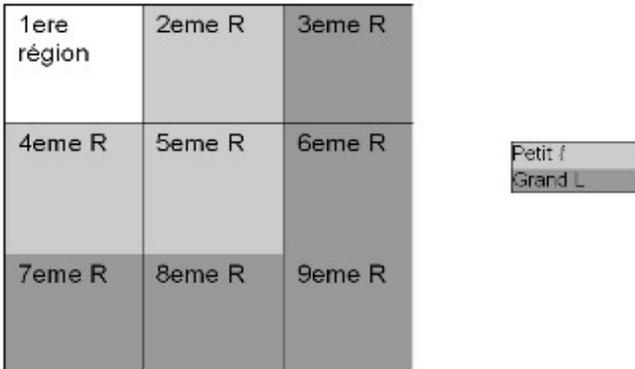


Figure 2

Dans la première région, on a neuf possibilités (1,2,3,4,5,6,7,8,9) pour la première case, puis plus que huit pour le seconde, sept pour la troisième,... Au final, on obtient  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ , soit  $9!$  ou 362880 possibilités pour la première région du sudoku.

Pour connaître un minorant [du nombre total de sudokus] , on a cherché des encadrements [pour les nombres de possibilités de remplir les cases ; ces encadrements sont indiqués sur la figure 3]

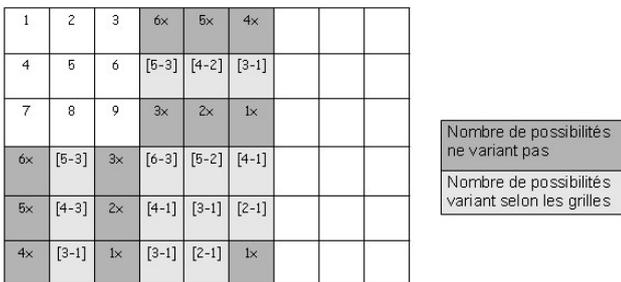


Figure 3

On a commencé par la région à côté (droite) de la région définie en tenant compte de la disposition dans celle-ci. On a cherché à savoir pourquoi on ne peut pas mettre 6 possibilités dans la case 4 de la 2ème région (encadrement [5-3]).

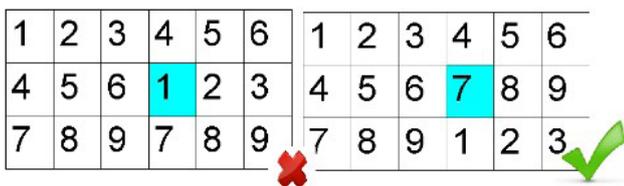


Figure 4

\* L'estimation du nombre de possibilités totales trouvée est la suivante : entre  $3,7 \times 10^{19}$  et 1030 possibilités.

On a calculé un minorant du  $\ell$  ( $2,2 \times 10^9$ )  $\times$  un minorant du L (46656)  $\times$  le nombre de possibilités de

la 1ère région ( $9!$ ).

Le minorant obtenu pour la grille 9x9 est d'environ  $3,7 \times 10^{19}$  possibilités

(mais en réalité il y a une erreur, nous nous sommes rendu compte que certaines grilles ne marchaient pas ce qui surestime le minorant trouvé). On renvoie à la méthode des symétries décrites ci-dessous pour un véritable calcul d'un minorant.

En multipliant le majorant du  $\ell$  ( $5,4 \times 10^{13}$ ) par un majorant du L ( $5,2 \times 10^{10}$ ) puis par le nombre de possibilités pour la première région ( $9!$ ) [On trouve environ  $10^{30}$ ].

**Le majorant trouvé pour la grille 9x9 est environ de  $10^{30}$  possibilités.**

### Autre méthode : transformations

La méthode que nous avons utilisée est la suivante : nous avons commencé par remplir une grille de départ que nous avons appelée 123 (figure 5).

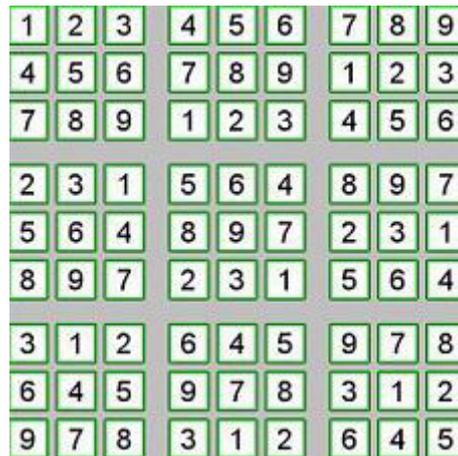
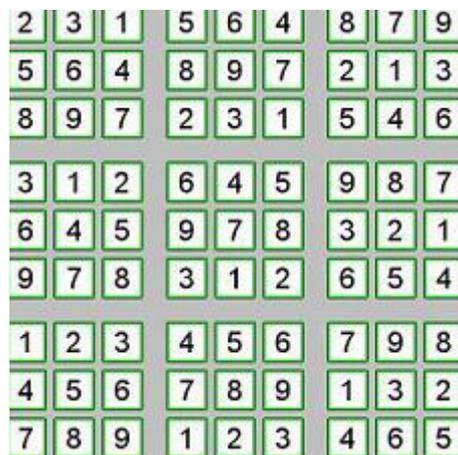


Figure 5

Nous lui avons appliquée diverses transformations :

- *Permutation de colonnes* (exemple) :



Après permutation de colonnes

• *Permutation de lignes (exemple)*

4	5	6	7	8	9	1	2	3
7	8	9	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	6	4	8	9	7	2	3	1
8	9	7	2	3	1	5	6	4
2	3	1	5	6	4	8	9	7
6	4	5	9	7	8	3	1	2
3	1	2	6	4	5	9	7	8
9	7	8	3	1	2	6	4	5

Après permutation de lignes

- *Permutation de chiffres...* [voir plus loin]
- *Symétrie par rapport à la colonne centrale*

Cette méthode consiste à échanger les chiffres par rapport à un axe vertical. (l'axe de symétrie du carré)

9	8	7	6	5	4	3	2	1
3	2	1	9	8	7	6	5	4
6	5	4	3	2	1	9	8	7
7	9	8	4	6	5	1	3	2
1	3	2	7	9	8	4	6	5
4	6	5	1	3	2	7	9	8
8	7	9	5	4	6	2	1	3
2	1	3	8	7	9	5	4	6
5	4	6	2	1	3	8	7	9

Après une symétrie verticale

- On fait de même avec les symétrie horizontale (*axe horizontal*), symétrie d'axe diagonal 1 (/) (*première diagonale*), symétrie d'axe diagonal 2 (\) (*deuxième diagonale*)

Nous n'avons pas trouvé le nombre total de grilles de sudokus (environ  $6,67 \times 10^{21}$  découvert par Bertram Felgenhauer et Frazer Jarvis). Nous avons donc cherché des nombres plus grands, des majorants, et des nombres plus petits, des minorants, pour l'encadrer.

**Encadrement du nombre cherché**

Ce dont nous sommes sûrs c'est qu'il y a moins de  $9!$  puissance 9 possibilités pour remplir une grille de sudokus étant donné qu'il y a  $9!$  possibilités pour remplir une région et qu'il y a 9 régions dans toute une grille, ces possibilités se multiplient entre elles. Mais ce nombre est un majorant [trop grand] car il faut aussi prendre en compte les contraintes du jeu de sudoku.

Un minorant serait obtenu avec le total de toutes les

possibilités trouvées en appliquant des transformations à une même grille fixe, la grille 123. Notre question est de savoir si nous devons additionner ou multiplier (?) les nombres de grilles obtenues par ces transformations : en effet, les multiplier pourrait revenir à faire des doublons. Ce qui fausserait notre comptage de toutes les possibilités en partant d'une même grille...

**Permutations de colonnes**

[Calcul d'un minorant]

?) Dans la grille de sudoku 123, nous allons permuter des colonnes. Pour cela, nous n'allons jamais permuter des colonnes de différentes régions entre elles pour qu'il n'y ait pas d'interférence dans les régions. Nous n'allons également pas permuter toutes les colonnes en une seule fois sinon, cela pourrait revenir à une permutation de chiffres.

Pour calculer, on compte d'abord le nombre de permutations de colonnes dans chaque colonne de régions, on trouve 6 possibilités pour chaque colonne de régions donc 6 puissance 3 pour les 3 colonnes de régions.

Après, on soustrait à ce résultat le nombre de cas, dans chaque colonne de régions, où toutes les colonnes sont changées d'un coup (soit A, B, C, les noms de trois colonnes d'une même colonne de régions, les combinaisons pour lesquelles toutes les colonnes bougent sont BCA et CAB) ce qui nous donne 2 pour chaque colonne de régions donc 2 puissance 3 pour les 3 colonnes de régions.

On fait donc:

$$(6 \text{ puissance } 3) - (2 \text{ puissance } 3) = 216 - 8 = 208 \text{ permutations de colonnes possibles.}$$

Puis, on multiplie le nombre de permutations de colonnes avec le nombre de permutations de lignes ce qui nous donne:

$$208 \text{ puissance } 2 = 43264 \text{ possibilités.}$$

**Permutations de chiffres**

Nous avons essayé de faire des permutations de chiffres, c'est-à-dire remplacer un chiffre par un autre chiffre dans toute la grille. Par exemple, changer tous les 1 en 2, tous les 2 en 3, tous les 3 en 4,... tous les 9 en 1. On notera ainsi une telle permutation :

- 1 2 3 4 5 6 7 8 9
- 2 3 4 5 6 7 8 9 1

Cette permutation donne, à partir de la grille 123, la grille suivante :

2	3	4	5	6	7	8	9	
5	6	7	8	9	1	2	3	
8	9	1	2	3	4	5	6	
3	4	2	6	7	5	9	1	
6	7	5	9	1	8	3	4	
9	1	8	3	4	2	6	7	
4	2	3	7	5	6	1	8	
7	5	6	1	8	9	4	2	

Symétrie verticale

Remarque : on peut laisser un ou plusieurs chiffres fixes. Par exemple la permutation :

1 2 3 4 5 6 7 8 9

2 3 4 5 6 7 8 1 9

Ici, on a laissé fixes les 9.

Nous avons ensuite calculé le nombre de permutations de chiffres possibles. Pour une grille donnée :

- On peut changer (ou garder) les 1 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités.

- On peut changer (ou garder) les 2 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 1 possibilité déjà utilisée lorsqu'on a changé les 1.

- On peut changer (ou garder) les 3 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 2 possibilités déjà utilisées lorsqu'on a changé les 1 et les 2.

- [...]

- On peut changer (ou garder) les 9 en 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 ou 9, soit 9 possibilités – 8 possibilités déjà utilisées lorsqu'on a changé les 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 et 8.

Le nombre total de permutations de chiffres s'élève donc à  $9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  possibilités, soit  $9!$  c'est-à-dire 362880.

### Minorant (méthode des transformations)

✱ Notre minorant est donc égal à :

362.880 × 43264 × 5 = 78.498.201.600, soit environ  $7,8 \times 10^{10}$

\*\*\*