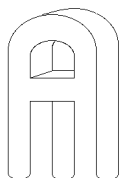


les paradoxes



par Rafik BEN DAKHLIA, Jean-Michel BERNARD, Marc BOILARD, Henri De CHAUVERON, Samuel CUNÉO, Sulvio JAUDI, Laurent LACUISSE

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris
Lycée Georges Braque, 21 rue Victor Puiseux,
95104 Argenteuil Cédex

Qu'est-ce qu'un paradoxe
mathématique ?

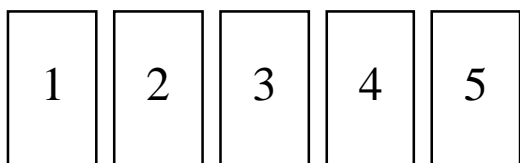
C'est la formulation d'une proposition
contraire à l'opinion résultant de
l'expérience quotidienne.

Le plus souvent,
elle permet de découvrir,
sous une apparence illogique,
une vérité inattendue.

Mais parfois, des paradoxes
résistent à l'analyse.

Par exemple, celui-ci est troublant :

Le père d'Elisabeth annonce à sa fille :
« Tu peux épouser Michel s'il tue le tigre
qui se trouve caché derrière l'une de ces
cinq portes. Il devra ouvrir les portes en
commençant par la n°1. Mais il ne
pourra pas deviner où il se trouve. »



Michel voit les portes et se dit : « Si les quatre premières portes ouvrent sur des pièces vides, je saurai que le tigre se trouve dans la pièce 5. Or le Roi a dit que je ne pourrai deviner où se trouve le tigre. Donc, le tigre ne peut être dans la pièce 5. Alors le tigre se trouve dans l'une des quatre premières pièces. Mais si j'ouvre les trois premières portes et qu'elles aboutissent à des pièces vides, le tigre se trouvera obligatoirement dans la pièce 4. Or le Roi a dit que je ne pouvais pas deviner où se trouvait le tigre. Donc, il n'est pas dans la pièce 4. » Et ainsi de suite : le tigre ne se trouve pas dans la pièce 3, ni dans la 2, ni dans la 1. Donc il n'y a aucun tigre derrière ces portes. Car s'il y en avait un, il serait prévisible.

Michel commence à ouvrir la première porte. Mais à la deuxième porte, le tigre apparaît et le dévore. Le Roi avait tenu parole ...

Nous allons maintenant envisager les paradoxes suivants : L'hôtel infini. / Le paradoxe de Zénon. / L'anneau de Mœbius. / Les figures impossibles.

1. L'hôtel infini.

Au départ, nous nous sommes penchés sur les paradoxes de l'infini avec l'exemple de l'hôtel infini : soit un hôtel avec un nombre de chambres, et de clients, infini. Un voyageur se présente mais toutes les chambres sont occupées. L'hôtelier, astucieux, décide de déplacer les clients de leur chambre de la façon suivante : le client de la chambre 1 va dans la chambre 2, le client de la chambre 2 va dans la chambre 3, et ainsi de suite. Donc le voyageur s'installera dans la chambre 1.

Mais si un nombre infini de voyageurs arrivent ? Au lieu de déplacer à chaque fois les clients d'une chambre, l'hôtelier peut proposer une autre solution : le client de la chambre 1 va dans la chambre 2, le client de la chambre 2 va dans la chambre 4, le client de la chambre 3 va dans la chambre 6, et ainsi de suite. Comme cela les chambres à chiffres impairs sont libres et les voyageurs en nombre infini peuvent s'installer dans celles-ci.

Autrement dit, dans l'ensemble des nombres pairs, $2N$, il y a autant d'éléments que dans N tout entier, idée paradoxale !

2. Le paradoxe de la tortue.

Ce paradoxe est le plus célèbre de Zénon.

Le guerrier Achille fait la course avec une tortue. On suppose qu'il est 10 fois plus rapide qu'elle. Si sa vitesse est de 1 m.s^{-1} , celle de la tortue est de $0,1 \text{ m.s}^{-1}$. Sur une distance de 1000 m on donne une avance de 100 m à la tortue. Le départ donné, quand Achille aura atteint le point T_0 (point de départ de la tortue) l'animal sera en T_1 ; quand Achille sera en T_1 , elle sera en T_2 et ainsi de suite. On en déduit qu'Achille ne rattrapera jamais la tortue !

Mais il y a une faille dans l'argumentation de Zénon. Ce paradoxe est résoluble en considérant une progression géométrique : le temps mis par Achille pour arriver en T_0 est $t_1 = 100 \text{ s}$. Quand il atteint T_0 , la tortue arrive en T_1 tel que $T_0T_1 = 10 \text{ m}$. Pour passer de T_0 en T_1 , puis de T_1 en T_2 , Achille met à chaque fois 10 fois moins de temps, on a donc :

- $t_1 = 100 \text{ s}$
- $t_2 = 10 \text{ s}$
- $t_3 = 1 \text{ s}$
- $t_4 = 0,1 \text{ s}$
- etc ... Donc

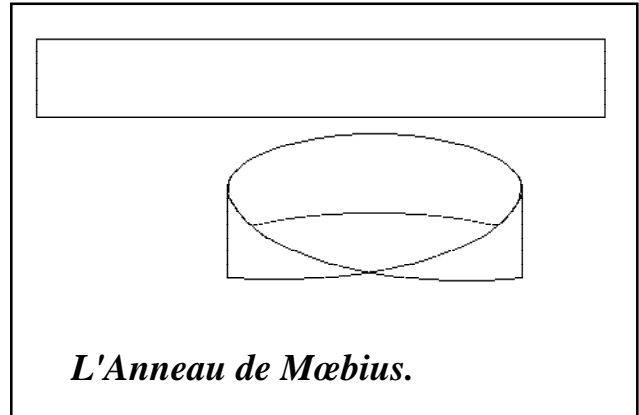


$$\sum_{n \geq 1} t_n = 100 + 10 + 1 + 0,1 + \dots \approx 111 \text{ s.}$$

Achille aura rattrapé la tortue après 111 s de course. Zénon ne pouvait concevoir qu'une somme illimitée de distances pouvait donner une distance finie. Or nous l'avons démontré, et c'est pourquoi Achille rejoint la tortue au bout d'une distance finie.

3. L'Anneau de Mœbius.

Nous avons étudié ensuite l'Anneau de Mœbius. Pour le construire, on prend une bande de papier (assez longue) et on colle les extrémités en opérant un demi-tour.



Question : Combien de faces a cet anneau ?

Réponse : Vous prenez un crayon et vous tracez une ligne tout au long du ruban et vous verrez que vous vous retrouverez à votre point de départ.

Donc ce ruban contient une seule face ! C'est une surface non-orientable.

Découpez ce ruban en son milieu.

Question : Qu'obtient-on ?

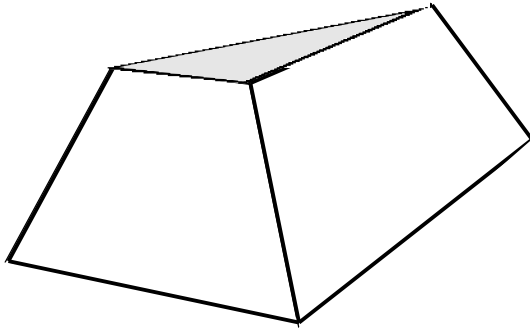
Réponse : On s'attend à trouver 2 rubans. En fait, on n'en obtient qu'un seul.



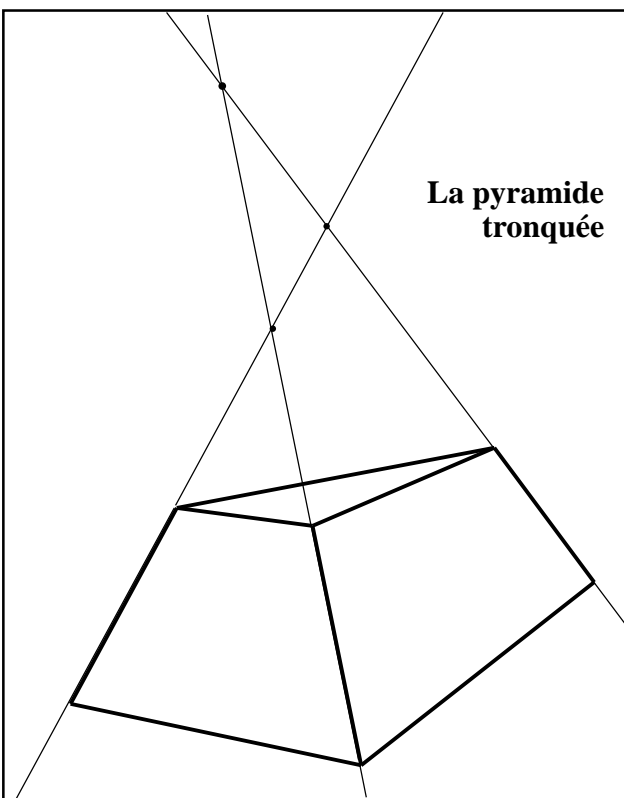
4. Les figures impossibles.

Nous avons enfin choisi d'étudier des figures impossibles. Ce sont des figures représentées sur une feuille de papier avec les règles de la perspective mais impossibles à construire en une matière rigide non déformable (du bois par exemple). Les faces représentées sont des surfaces planes.

La pyramide tronquée



A première vue, la figure présentée semble représenter une pyramide tronquée. Si la figure représente une pyramide tronquée, alors, si l'on poursuit les arêtes de cette pyramide, elles devraient se couper toutes les trois en un point unique. Or ce n'est pas le cas. Donc, à première vue, on avait l'impression d'être en présence d'une pyramide tronquée, alors qu'en fait ce n'est pas une pyramide tronquée.

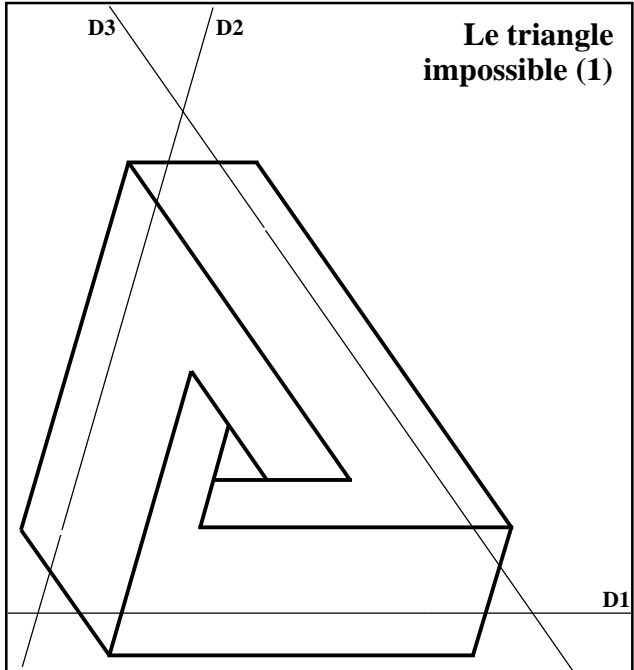


Conventions de dessin

Deux droites parallèles se projettent suivant deux droites parallèles dans le plan.

Il y a conservation des rapports de longueurs ; un milieu est représenté par un milieu.

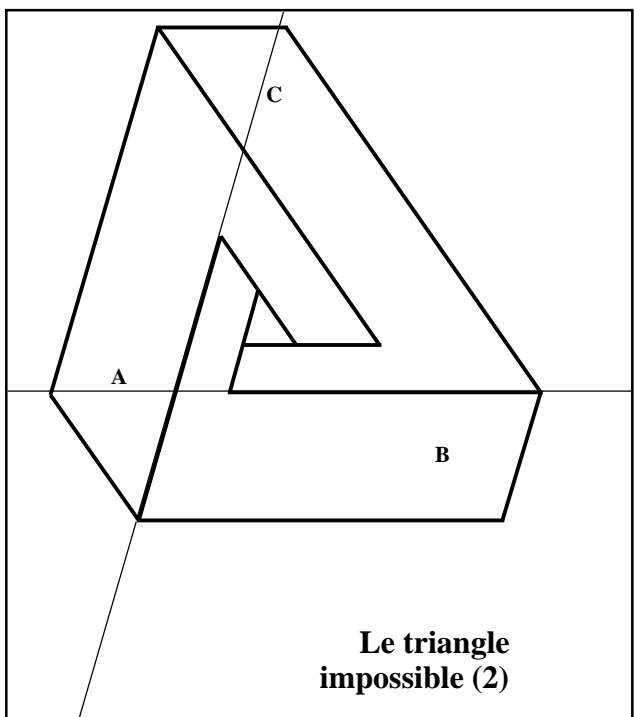
Le triangle impossible (1)



La perception visuelle d'une figure impossible

Analysons la manière dont un objet de l'espace est observé par le cerveau. Tout d'abord, de l'objet dans l'espace, l'œil donne une image sur la rétine. Puis, de cette image sur la rétine, le cerveau fait une représentation en 3 dimensions.

Le triangle impossible (2)



Le triangle impossible (1)

Hypothèses :

D_1 passe au milieu du chevron 1, c'est-à-dire que D_1 est parallèle aux arêtes et passe par le centre. De même, D_2 passe par le chevron 2, et D_3 par le chevron 3.

Les trois angles formés par les droites D_1 , D_2 , D_3 sont droits. Les droites D_2 et D_3 sont perpendiculaires à D_1 ; il est impossible que D_2 et D_3 soient perpendiculaires.

D'après les hypothèses, le triangle est impossible. C'est donc un graphisme qui ne peut exister dans la réalité.

Bref historique du triangle impossible

En 1934, Oscar Reutersvärd présente une première construction à trois chevrons.

En 1958, R. Penrose publie un article dans le « British Journal of Psychology » intitulé “Impossible objects : a special type of visual illusion”.

En 1961, Escher publie sa lithographie “Cascade” bien connue.

Le triangle impossible (2)

Hypothèses :

A, B, C sont trois plans distincts. D_1 est la droite d'intersection des plans A et B. D_2 est la droite d'intersection des plans B et C. D_3 est la droite d'intersection des plans A et C.

Théorème utilisé :

Soient trois plans de l'espace non parallèles deux à deux. Leurs droites d'intersections se coupent en un point unique.

Sur le triangle considéré, les trois droites d'intersections définies dans les hypothèses se coupent en trois points distincts. Or les trois plans A, B, C n'étant pas parallèles, leurs droites d'intersections D_1 , D_2 , D_3 devraient se couper en un point. Ici, ce n'est pas le cas.

Conclusion : la figure n'existe pas dans l'espace.

Nous avons trouvé le triangle impossible et nous avons également inventé des lettres vues en perspective faisant intervenir des figures impossibles. Et pour le deuxième séminaire, au CNAM, nous avons affiché le titre « PARADOXE DE MATH EN JEANS » écrit avec de telles lettres (dont certaines étaient seulement visuellement troublantes).

Le « A » reprenait le dessin du triangle impossible. Le « T » nous a posé un problème. A première vue, cette figure paraît impossible. Si nous avons une vision locale du bas de la figure, nous nous apercevons que la face qui semble être devant est délimitée par les arêtes A_1 et B_1 . Si on regarde localement le haut de la figure, on remarque que la face qui semble être de côté est délimitée par les arêtes A_2 et B_2 . Or si nous regardons globalement la figure, on voit que les arêtes A_1 et A_2 sont confondues, ainsi que les arêtes B_1 et B_2 . Ce qui montre que la face qui semble être devant est confondue avec celle qui semble être de côté. Ce qui montrerait l'impossibilité du « T ». Or nous avons pu le construire, en bisautant les parties du bas de la figure.

Et pour terminer, le « M » impossible : partons de la face A. Si l'on prolonge cette face, on remarque que ce même plan est séparé par l'arête A_1 .

Donc cette figure est impossible.

