

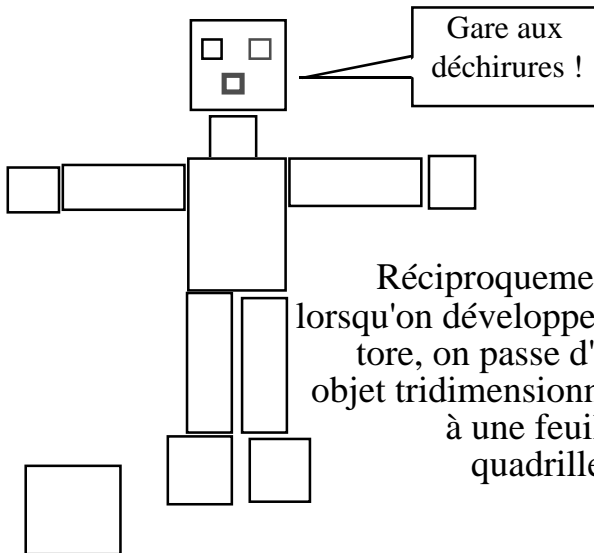
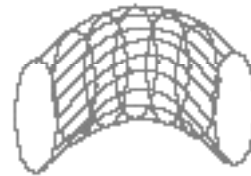
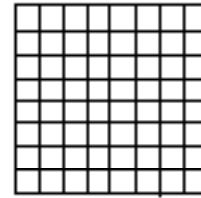
le tore

par Anne FOURÉ, Antonino JOAO,
Simohamed KHABIR, Alice MERLET

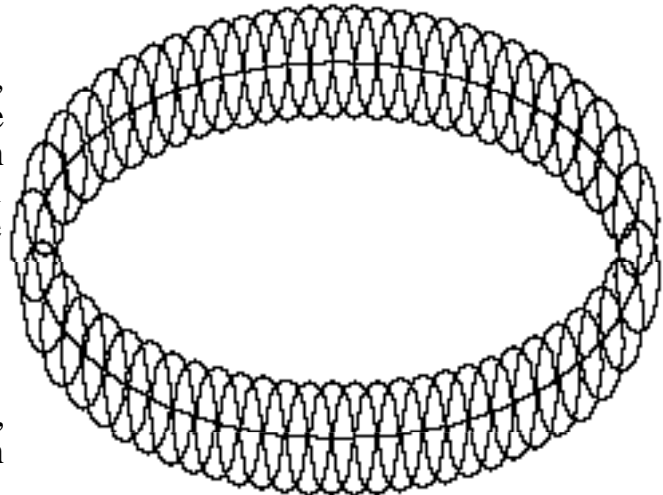
Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris

Surface de révolution engendrée par un
petit cercle tournant autour d'un axe
contenu dans le plan du tore.

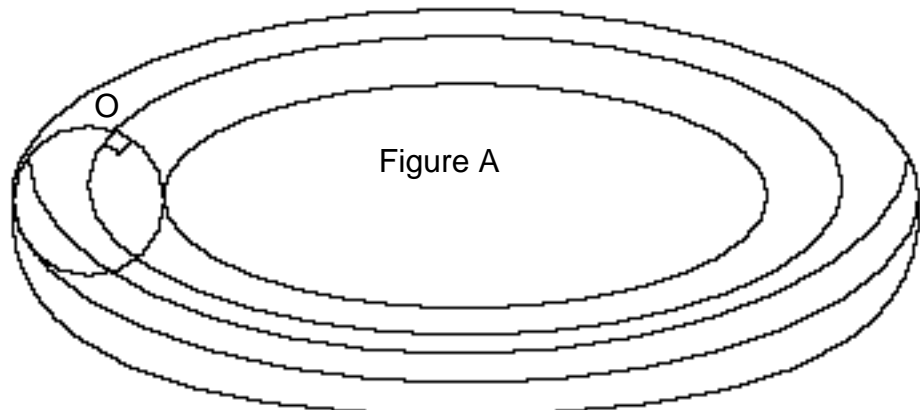
On obtient un tore en roulant une feuille
quadrillée dans le sens de la longueur
puis dans le sens de la largeur.



Réciproquement,
lorsqu'on développe le
tore, on passe d'un
objet tridimensionnel
à une feuille
quadrillée.



Ainsi,
pour étudier les droites sur le tore, on
utilisera le quadrillage.



Les droites sur le tore

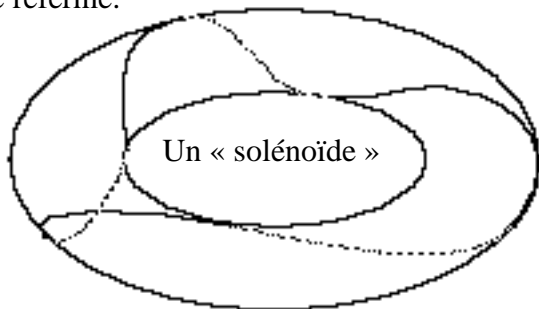
On choisit un repère sur le tore, formé par un petit cercle et par un grand cercle. Par le développement du tore, on obtient alors un axe des abscisses et un axe des ordonnées. Le point O, origine du repère est alors défini comme étant le point d'intersection du petit cercle et du grand. Comme on peut choisir l'emplacement du petit cercle sur le tore, le point O est choisi arbitrairement. Tout point du tore correspond alors à un point de la feuille quadrillée et est repéré par son abscisse et son ordonnée.

Une droite sur le tore ? On trace une droite dans ce plan repéré, et par déformation du plan en un tore, on obtient une courbe sur le tore, qu'on appellera « droite du tore ».

Remarque : lorsqu'on parcourt un tour de petit cercle, on revient toujours à l'origine ; il en est de même pour les grands cercles. Donc quand on parcourt n tours (avec n entier) de petits ou de grands cercles, on revient à l'origine. Ainsi, tous les points à coordonnées entières s'identifient à l'origine.

On a convenu qu'il n'était pas nécessaire de prolonger le quadrillage après le point de coordonnées (1, 1).

Exemple : soit une droite passant par l'origine et ayant pour pente 2/3. Elle coupe alors trois fois le petit cercle de base et deux fois le grand cercle de base. Elle passe par le point A(3, 2) qui s'identifie à l'origine, donc elle se referme.



Etude des droites qui se referment.

Cas général : soit la droite passant par l'origine et de pente n/p avec n et p entiers naturels. Le point A(p, n) s'identifie à l'origine. Donc les droites qui passent par O et qui ont pour pente n/p (n et p ∈ N) se referment après avoir coupé n fois le grand cercle et p fois le petit cercle de base.

Deux solénoïdes parallèles.



Etude des droites qui ne se referment pas.

Exemple : soit la droite D, passant par l'origine et de pente √2. Alors D : y = √2 x.

Si x ∈ N, alors y ∈ R \ Q et réciproquement. Donc il n'existe pas de point à coordonnées entières sur D, en dehors de O. Et donc D ne se referme pas.

Cas général : Peut-on envisager des droites qui se referment si elles ont des pentes irrationnelles ? Soit D la droite passant par l'origine sur le tore ; elle a pour pente m avec m ∈ R \ Q. D : y = m x. Or m étant irrationnel, lorsque x est entier, le produit mx est irrationnel donc y est irrationnel. Il ne peut donc y avoir de point de D identifiable à l'origine O. Donc les droites de pente m, avec m ∈ R \ Q, ne se referment pas.

CONCLUSION : les droites ne se referment que si elles ont une pente rationnelle.

Soient deux droites D et D' d'équations respectives

$$y = \frac{a}{b} x \text{ et } y = \frac{c}{d} x$$

telles que $\frac{a}{b}$ et $\frac{c}{d}$ soient deux fractions irréductibles, et (a, b, c, d) ∈ Z*4.

On choisit de telles droites (passant par l'origine) pour simplifier le raisonnement ainsi que les calculs. On a le système suivant :

$$\begin{cases} ax - by = 0 \\ -cx + dy = 0 \end{cases}$$

Calculons le déterminant de ce système :

$$\det S = \begin{vmatrix} a & -b \\ -c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Expérimentalement, nous avons trouvé que le nombre de points d'intersection est |ad - bc|. Aucun contre-exemple n'a été découvert.

[NDLR : voir page suivante.]

pentes de même signe, positif		
$y = \frac{a}{b} x$	$y = \frac{c}{d} x$	nombre d'intersections $\Delta = ad - bc $
$y = \frac{9}{10} x$	$y = \frac{5}{2} x$	
$y = \frac{5}{2} x$	$y = \frac{2}{10} x = \frac{1}{5} x$	23
$y = \frac{2}{3} x$	$y = \frac{1}{2} x$	1
$y = \frac{9}{5} x$	$y = \frac{1}{10} x$	85
$y = \frac{9}{10} x$	$y = \frac{10}{9} x$	19
$y = 3 x$	$y = \frac{1}{3} x$	8
$y = \frac{7}{4} x$	$y = \frac{9}{5} x$	1

pentes de signes contraires		
$y = \frac{a}{b} x$	$y = \frac{c}{d} x$	nombre d'intersections $\Delta = ad - bc $
$y = \frac{8}{7} x$	$y = -\frac{1}{9} x$	
$y = \frac{7}{4} x$	$y = -\frac{4}{7} x$	34
$y = \frac{3}{5} x$	$y = -\frac{5}{3} x$	34
$y = \frac{5}{4} x$	$y = -\frac{3}{2} x$	2
$y = \frac{9}{10} x$	$y = -\frac{10}{9} x$	181
$y = \frac{3}{4} x$	$y = -\frac{5}{6} x$	2
$y = \frac{3}{4} x$	$y = -\frac{4}{3} x$	25

Où l'algèbre vient au secours de la géométrie (et réciproquement).

droite $y = 1,5 x$

par Gérard-Edmond Duchamp

Combien y a-t-il de points d'intersection entre deux droites qui se referment sur le tore ?

Si les droites se coupent, on prend un point d'intersection comme origine du repère (voir figure A dans l'article des élèves). Les équations deviennent :

$(E_1) : a x + b y \in \mathbb{Z}$
 $(E_2) : c x + d y \in \mathbb{Z}$

Là (règle du jeu) on s'autorise les transformations suivantes :

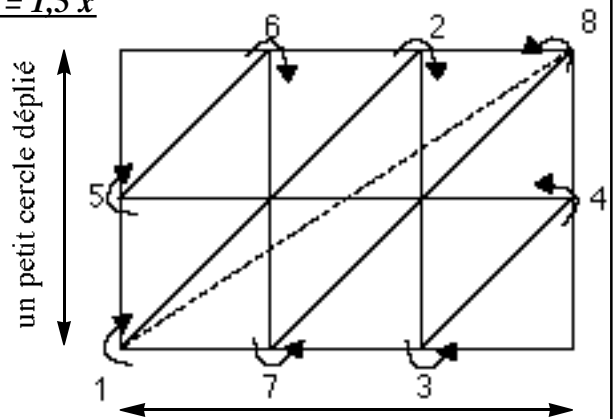
$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \xrightarrow{t_1} \begin{matrix} E_1 + k E_2 \\ E_2 \end{matrix}$$

ou

$$\begin{matrix} E_1 \\ E_2 \end{matrix} \xrightarrow{t_2} \begin{matrix} E_1 \\ E_2 + k E_1 \end{matrix}$$

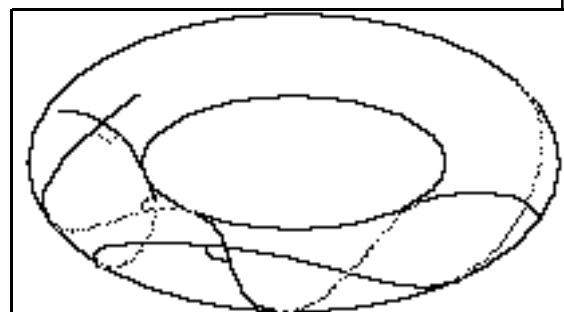
On montre facilement que : 1) On peut “vider” le coefficient de y dans une des équations ; 2) Les transformations ne changent pas le déterminant, soit :

$(E_1) : a_1 x \in \mathbb{Z}$
 $(E_2) : c_2 x + d_2 y \in \mathbb{Z}$ $\Delta = a_1 d_2$ est le déterminant



identifications : $(2) = (3), (4) = (5), (6) = (7), (8) = (1)$.

On a à calculer le nombre de points sur E_2 dont les abscisses sont $0, 1/a_1, 2/a_1, \dots, (a_1-1)/a_1$; pour chaque x fixé il y a d_2 possibilités en y d'où : le nombre de points est D .



Deux « solénoïdes » perpendiculaires ; on remarque qu'ils se coupent plusieurs fois.