

l'ensemble de Mandelbrot

par (Tle C)

Lycée Bartholdi, 68000 Colmar

Mandelbrot a commencé à étudier les courbes fractales en 1964.

Il n'a découvert l'ensemble qui porte son nom qu'en 1980, ce qui prouve que c'est un domaine où il reste bien des découvertes à faire.

1. Quelques mots sur Mandelbrot

Benoit P. Mandelbrot est un mathématicien né en 1924 à Varsovie. Dès 1936, il quitte la Pologne pour Paris, où il fait de brillantes études et finit par intégrer l'Ecole Polytechnique. Il part ensuite aux U.S.A., où il travaille encore aujourd'hui pour la firme I.B.M. Il est aussi professeur de mathématiques à l'Université d'Harvard.

2. La découverte de l'ensemble de Mandelbrot

Mandelbrot s'était lancé dans l'étude d'une suite simple (z_n) de nombres complexes, définie par la relation de récurrence :

$$z_{n+1} = z_n^2 + c$$

en prenant $z_0 = 0$, et où c est un nombre complexe de la forme $p + iq$.

Mandelbrot voulait trouver les valeurs de c pour lesquelles

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |z_n| = +\infty$$

Il a donc trouvé un algorithme permettant de visualiser sur l'écran de son ordinateur (les calculs à la main lui auraient pris plusieurs siècles !) les points d'affixe c du plan complexe vérifiant la relation.

La forme centrale, de forme biscornue, est connue sous le nom d'ensemble de Mandelbrot, que nous appellerons dorénavant M pour plus de commodité. Nous utiliserons plusieurs termes désignant chacune des parties de M . Pour une meilleure compréhension il est nécessaire de les définir ici.

cardioïde : partie centrale et la plus importante par la taille de M . Son nom est dû à ce qu'elle affecte à peu près une forme de cœur.

bourgeons : nombreuses excroissances circulaires se développant à partir de la cardioïde ou d'autres bourgeons.

antennes : structures minces et très allongées se trouvant à différentes extrémités de M , et notamment sur l'axe principal.

3. L'algorithme

Il permet l'élaboration d'un programme faisant apparaître M. Les remarques en italique ne font pas partie de l'algorithme mais servent d'explication. Cet algorithme est prévu pour un écran de a colonnes et b lignes, utilisant K couleurs.

ETAPE 0 : attribution des valeurs désirées aux variables :

pmin	abscisse minimale]	limites de la
pmax	abscisse maximale]	portion du
qmin	ordonnée minimale]	plan complexe
qmax	ordonnée maximale]	représentée à
		l'écran
m	nombre relativement grand	
$\Delta p = (pmax - pmin) / (a - 1)$	calcul de la différence d'abscisse entre deux pixels consécutifs	
$\Delta q = (qmax - qmin) / (b - 1)$	calcul de la différence d'ordonnée entre deux pixels consécutifs	

Pour tous les entiers np de 0 à (a-1) et tous les entiers nq de 0 à (b-1), passer par les étapes suivantes (utiliser deux boucles imbriquées) :

ETAPE 1 :	$p_0 = pmin + np * \Delta p$ $q_0 = qmin + \Delta q$	calcule abscisse et ordonnée du pixel de coordonnées (np, nq)
	k=0	k est la couleur courante
	$x_0 = y_0 = 0$	coordonnées du point M_0 d'affixe z_0
ETAPE 2 :	$x = x_0^2 - y_0^2 + p$ $y = 2 * x_0 * y_0 + q$	calcule les coordonnées du point M_{n+1} d'affixe $z_{n+1} = z_n^2 + c$
	k=k+1	incrémenter de la couleur courante
	$x_0 = x$ $y_0 = y$	passage au rang supérieur (n → n+1)
ETAPE 3 :	$r = x_0^2 + y_0^2$	$r = z $
	<u>tests :</u>	
	si $r > m$ alors étape 4 coul=k	on considère que (z_n) tend vers $+\infty$ on choisit la couleur k
	si $k = K$ alors étape 4	on est arrivé à la fin des couleurs disponibles sans que jamais $r > m$ on considère que (z_n) ne tend pas vers $+\infty$
	coul=0	on choisit la couleur 0 (noir)
	si $r \leq m$ et $k < K$ alors étape 2	on passe une fois de plus dans la boucle
ETAPE 4 :	on colorie le pixel de coordonnées (np, nq) dans la couleur coul	

remarques : * tous les points étant passés le même nombre de fois dans la boucle sont coloriés de la même couleur.

* si le nombre de couleurs disponibles est limité, on peut reprendre les mêmes dès que la palette est épuisée. Par exemple, avec K couleurs : $k = k \text{ mod } K$

4. Propriétés

M est composé d'une seule partie. La démonstration a posé de nombreux problèmes aux mathématiciens, mais on est finalement arrivé à le prouver, notamment grâce aux travaux de Douady, Hubbard, Fatou ...

M est symétrique par rapport à l'axe des abscisses. Il est aisé de le prouver :

Soient $z_n = a+ib$ et $z'_n = a-ib$ deux nombres complexes conjugués, qui sont donc les affixes de deux points du plan complexe symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

$$|z_n| = \sqrt{(a^2+b^2)} \text{ et } |z'_n| = \sqrt{(a^2+(-b)^2)} = |z_n|$$

Or, dans notre algorithme, c'est le module $|z_n|$ qui est testé. Il est donc normal que les tests donnent des résultats identiques pour des points symétriques par rapport à l'axe des abscisses, ce qui explique qu'ils aient la même couleur.

En fait, M a une structure très compliquée à morphologie fractale (on retrouve sa forme générale en en agrandissant une petite partie un grand nombre de fois).

5. Pour trouver les centres des composants de M.

On pose $Pc(z)=z^2+c$ et $Pc^k(z)=Pc(z+k+1)$. Ainsi, par exemple, $Pc^2(z)=Pc(z+1)=(z^2+c)^2+c$. Les centres de la cardioïde et des bourgeons sont les solutions complexes des équations $Pc^k(0)=0$. Ce sont des équations de degré 2^{k-1} , qui ont donc 2^{k-1} solutions complexes.

exemples (on ignore à chaque fois les solutions déjà données par les équations précédentes) :

k=1 solution : $c=0$ (centre de la cardioïde)
k=2 $c^2+c=0$; nouvelle solution : $c=-1$ (centre du plus gros bourgeon)
k=3 $(c^2+c)^2+c=0$; nouvelles solutions :
 $c=-1.7549$ (petit M sur l'axe principal) ;
 $c=-0.1226\pm 0.7449i$ (bourgeons latéraux)
k=4 $((c^2+c)^2+c)^2+c=0$; nouvelles solutions :
 $c=-1.3107$ (2^e bourgeon sur l'axe principal)
 $c=-1.9408$ (petit M sur l'antenne principale)
 $c=0.282\pm 1.53i$ (bourgeons latéraux)
 $c=-0.1565\pm 1.0323i$ (petits M sur des antennes latérales)

Les ensembles de Julia

Ces ensembles portent le nom de Gaston Julia, mathématicien français, qui les a étudiés au début du siècle. Ils étaient donc connus bien avant l'ensemble de Mandelbrot, mais le développement de l'informatique les a ressortis de l'ombre. Ce n'est que plus tard qu'on a découvert les rapports existant entre les ensembles de Julia et de Mandelbrot.

Le principe général de création des ensembles de Julia est quasiment le même que pour l'ensemble de Mandelbrot. La suite étudiée est toujours $z_{n+1} = z_n^2 + c$. La principale différence réside dans le fait que, cette fois-ci, c est choisi et reste constant. Par contre, c'est z_0 qui varie. Ainsi, les points d'affixe z_0 seront coloriés de manières différentes suivant les résultats aux tests (les mêmes qu'avant), c'est-à-dire suivant la limite de la suite (z_n).

Les ensembles de Julia sont tous symétriques par rapport à l'origine.

La forme des ensembles de Julia varie avec les valeurs qu'on attribue à c . En fait, cette forme dépend de la position du point d'affixe c par rapport à l'ensemble de Mandelbrot. Ainsi, pour deux valeurs de c ayant à peu près la même position relative par rapport à M, on obtient deux ensembles de Julia de formes quasiment identiques. C'est un phénomène observé mais pas encore expliqué.

5. Pour trouver les extrémités des antennes

Les extrémités des antennes sont les solutions des équations $Pc^n(0)=Pc^{n-k}(0)$, avec $1 \leq k \leq n-2$. [remarque : on ne tient pas compte des solutions donnant les centres des éléments.]

exemples (on ignore à chaque fois les solutions déjà données par les équations précédentes) :

n=3, k=1 $(c^2+c)^2+c=c^2+c$; solution : $c=-2$ (extrémité de l'antenne principale)
n=4, k=1 $((c^2+c)^2+c)^2+c=c^2+c$; nouvelles solutions : $c=\pm i$ (extrémités d'antennes latérales)
n=4, k=2 $(c^2+c)^2+c=(c^2+c)^2+c$; nouvelles solutions : $c=-0.22816\pm 1.11514i$ (extrémités des antennes s'étendant le plus en ordonnée)