

Mini black Jack

Élèves : Axel et Maxence (3ème)

Établissement : Collège « l'Ardillière de Nézant » à Saint-Brice sous forêt

Professeur : Yan Bourit

Chercheur : François Parreau, Université de Paris XIII Villetaneuse

Voici un jeu inspiré du black Jack, très simplifié. Vous jouez contre la « banque » et on tire des dés au lieu de cartes.

Au début d'une partie, on lance deux dés pour vous et un dé pour la banque, et vous voyez les résultats.

Alors vous pouvez demander un autre lancer de dé, puis un autre, ceci autant de fois que vous voulez tant que votre total ne dépasse pas 12. Vous pouvez aussi décider de vous arrêter à tout moment.

Ensuite la banque lance des dés pour elle-même, mais avec une règle forcée : jusqu'à un total de 10, elle relance le dé et dès qu'elle a au moins 11 elle est obligée de s'arrêter.

Vous avez gagné si votre total est supérieur à celui de la banque à condition qu'il ne dépasse pas 12, ou si la banque a dépassé 12 mais pas vous.

La banque gagne dans le cas opposé. En cas d'égalité la partie est remise.

Pouvez-vous trouver la meilleure stratégie à ce jeu ?

C'est-à-dire comment décider quand il est mieux de redemander un lancer de dé ou de s'arrêter ? Cela dépend de votre total de points et du résultat du premier dé de la banque que vous voyez ?

Après avoir lancé vos deux premiers dés,
vous devez décider votre stratégie :

« A quel nombre allez-vous vous arrêter ?
10 ? 9 ? 8 ? ou 7 ? »



Définitions et règles

Définition:

La probabilité d'un évènement c'est :

$$\frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$$

Règles :

Si 2 évènements **se suivent sur une branche** :

$$p(a \text{ puis } b) = p(A) \times p(B) \quad [1]$$

Si deux évènements **sont incompatibles** c'est à dire s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps :

$$p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$$

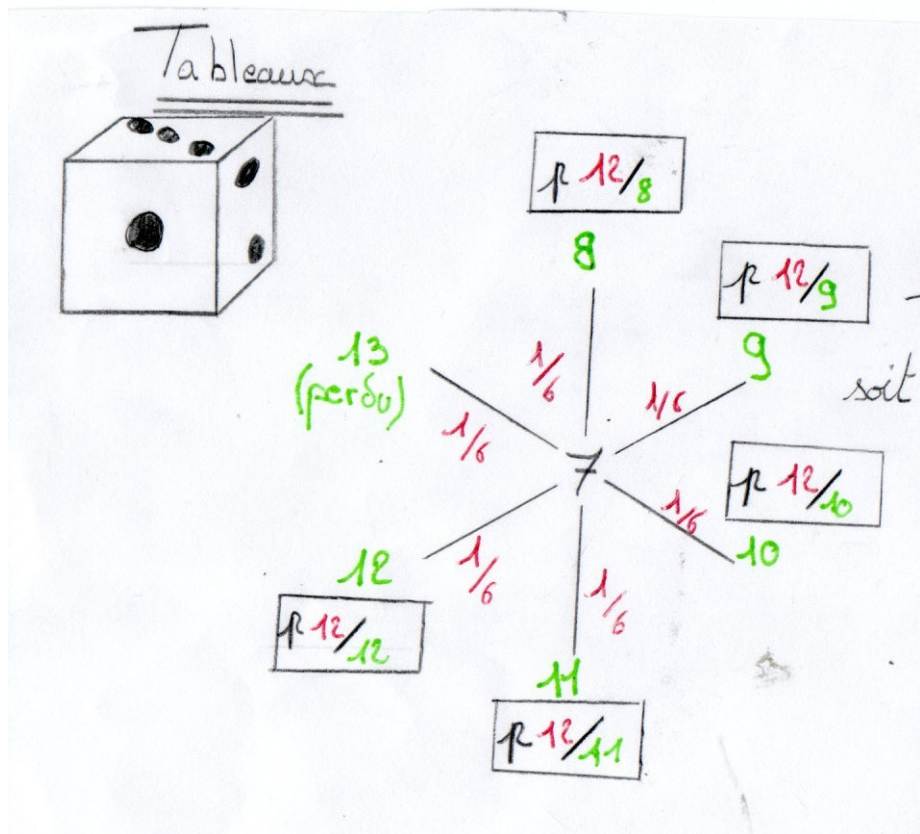
Notation

La probabilité d'obtenir le total x quand on est déjà à n se note : $p(x/n)$

Calcul des probabilités d'arriver à n quand on est à p

Je cherche la probabilité d'arriver à 12 quand je suis à 7.

C'est à dire $p(12/7)$.



Quand on est à 7, il y a :

- 1 chance sur 6 de faire un 1, et d'arriver à 8,
- 1 chance sur 6 de faire un 2, et d'arriver à 9,
- 1 chance sur 6 de faire un 3, et d'arriver à 10,
- 1 chance sur 6 de faire un 4, et d'arriver à 11,
- 1 chance sur 6 de faire un 5, et d'arriver à 12,
- Et 1 chance sur 6 de faire un 6, et de sortir.

On obtient donc la formule suivante dans le cas où on rejoue toujours sauf si on est sorti.

Ce qui n'est pas une très bonne stratégie.

$$p(12/7) = \frac{1}{6}p(12/8) + \frac{1}{6}p(12/9) + \frac{1}{6}p(12/10) + \frac{1}{6}p(12/11) + \frac{1}{6}p(12/12)$$

On met $\frac{1}{6}$ en facteur et on obtient donc

$$p(12/7) = \frac{1}{6}(p(12/8) + p(12/9) + p(12/10) + p(12/11) + p(12/12))$$

Autrement dit :

Il suffit d'additionner les probabilités précédentes (six au maximum) et de diviser par 6.

Tableau des probabilités

Nous avons calculé les tableaux suivants en utilisant la méthode décrite à la page précédente. Les résultats sont en pourcentages.

Par exemple, lisons la première ligne du premier tableau.

La probabilité, pour la banque, d'obtenir 12 quand elle est déjà à 12 est évidemment de 100 %.

Par contre la probabilité, pour la banque, d'obtenir 12 quand elle est à 11 est de 0 %, puisqu'elle est obligée de s'arrêter.

Et la probabilité d'obtenir, pour la banque d'obtenir 12 quand elle est à 10 est de 16,67 %, car c'est la somme de 100 % et de 0 % divisée par 6.

Probabilité d'obtenir x quand on est à n avec arrêt à 11

x/n	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
12,00	100,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	19,36	22,58	23,57	24,26	24,52
11,00	0,00	100,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	36,02	25,36	26,81	28,04	28,93
sortir	0,00	0,00	66,67	61,11	54,63	47,07	38,25	44,62	52,06	49,62	47,71	46,55

Probabilité d'obtenir x quand on est à n avec arrêt à 10

x/n	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
12,00	100,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	14,21	16,58	19,34	19,79	19,85
11,00	0,00	100,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	19,36	22,58	23,57	24,26
10,00	0,00	0,00	100,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	36,02	25,36	26,81	28,04
sortir	0,00	0,00	0,00	50,00	41,67	31,94	20,60	24,04	28,04	32,71	29,83	27,86

Probabilité d'obtenir x quand on est à n avec arrêt à 9

x/n	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
12,00	100,00	0,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	9,80	11,43	13,34	15,56	15,38
11,00	0,00	100,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	14,21	16,58	19,34	19,79
10,00	0,00	0,00	100,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	19,36	22,58	23,57
9,00	0,00	0,00	0,00	100,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	36,02	25,36	26,81
sortir	0,00	0,00	0,00	0,00	33,33	22,22	9,26	10,80	12,60	14,70	17,15	14,46

Probabilité d'obtenir x quand on est à n avec arrêt à 8

x/n	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
12,00	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	16,67	19,44	6,02	7,02	8,19	9,56	11,15
11,00	0,00	100,00	0,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	9,80	11,43	13,34	15,56
10,00	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	14,21	16,58	19,34
9,00	0,00	0,00	0,00	100,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	19,36	22,58
8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	36,02	25,36
sortir	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	16,67	2,78	3,24	3,78	4,41	5,15	6,00

Probabilité d'obtenir x quand on est à n avec arrêt à 7

x/n	12,00	11,00	10,00	9,00	8,00	7,00	6,00	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00
12,00	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	16,67	2,78	3,24	3,78	4,41	5,15
11,00	0,00	100,00	0,00	0,00	0,00	0,00	16,67	19,44	6,02	7,02	8,19	9,56
10,00	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	9,80	11,43	13,34
9,00	0,00	0,00	0,00	100,00	0,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	14,21	16,58
8,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00	0,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	19,36
7,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	100,00	16,67	19,44	22,69	26,47	30,88	36,02
sortir	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

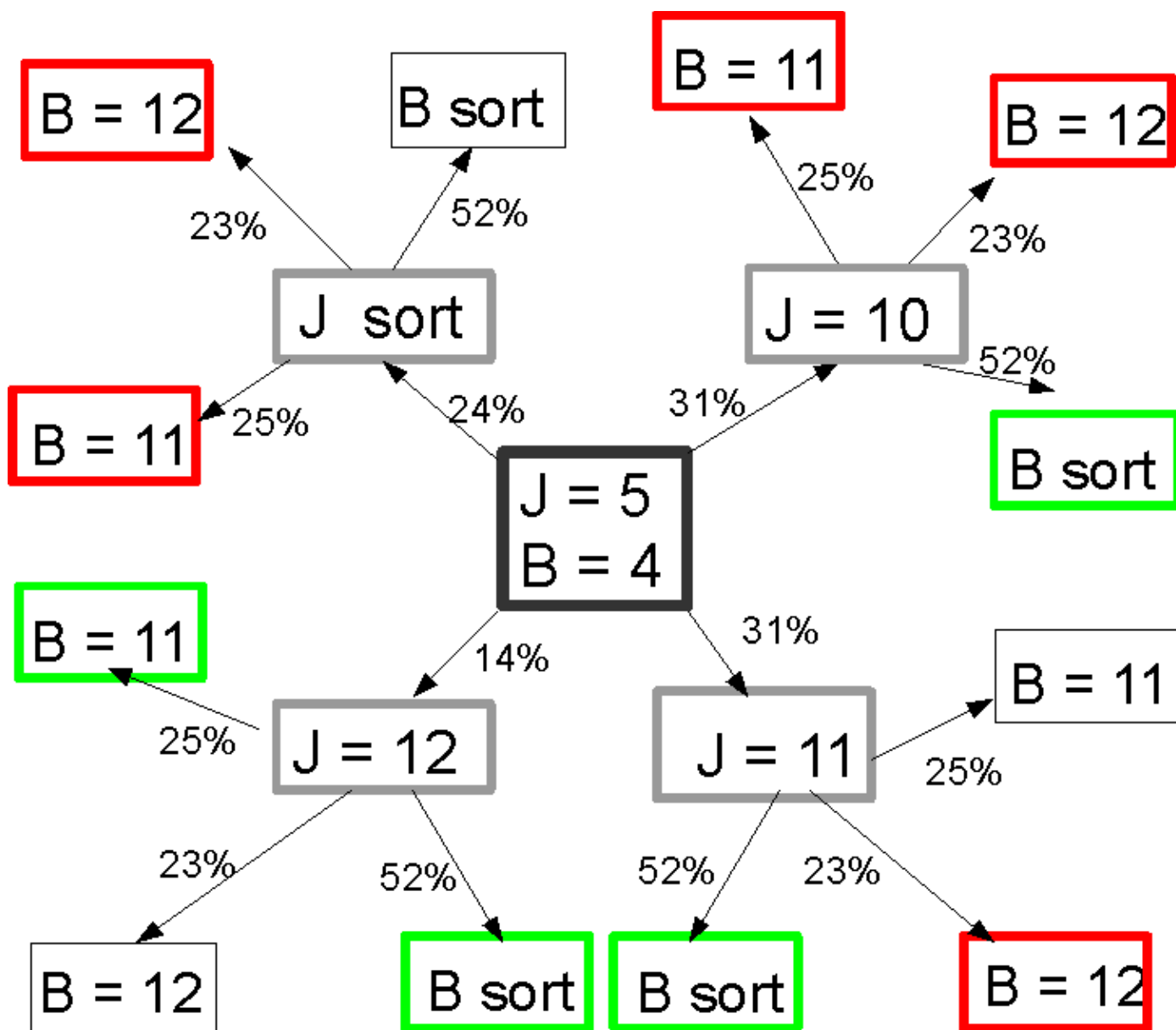
Méthode de comparaison des stratégies

Ce schéma correspond à la stratégie du joueur et la stratégie de la banque

Dans ce schéma la stratégie du joueur est l'arrêt à 10 (en sachant qu'il est déjà à 5 soit $j=5$)

Dans ce schéma la stratégie de la banque est l'arrêt à 11 (sachant que la banque est déjà à 4 soit $b=4$)

Ainsi ce schéma relate toutes les possibilités que le joueur gagne (en vert), perde (en rouge) ou soit ex-æquo (en noir) avec la banque.



Si on regarde la partie en haut à droite, alors le joueur qui est à 5 a 31% de chance d'arriver à 10.

Et la banque qui est à 4 a 25% d'arriver à 11.

Donc il y a 31% multiplié par 25% de chances que le joueur soit à 10 **ET** que la banque soit à 11 (voir les formules de la page 2).

Ensuite on a additionné tout les cas où le joueur gagne, perd ou est ex-æquo avec la banque.

C'est comme ça que l'on obtient les tableaux de la page suivante.

Conclusion

Le joueur a fait 5 et la banque a fait 4.

 le joueur a perdu

 le joueur a gagné

égalité

Le joueur décide de s'arrêter à 10

Proba que la banque arrive à B et que le joueur arrive à J

BVJ	10	11	12	sortir
11	7,83%	7,83%	3,60%	6,10%
12	6,97%	6,97%	3,21%	5,43%
sortir	16,08%	16,08%	7,40%	12,52%

le joueur a gagné	Egalité	le joueur a perdu
43,15%	23,56%	33,30%

proba de gagner – proba de perdre :	9,85%
-------------------------------------	--------------

Le joueur a fait 5 et la banque a fait 4.

Le joueur décide de s'arrêter à 9

Proba que la banque arrive à B et que le joueur arrive à J

BVJ	9	10	11	12	sortir
11	6,71%	6,71%	6,71%	2,49%	2,74%
12	5,98%	5,98%	5,98%	2,21%	2,44%
sortir	13,78%	13,78%	13,78%	5,10%	5,62%

le joueur a gagné	Egalité	le joueur a perdu
48,93%	14,55%	36,53%

proba de gagner – proba de perdre :	12,39%
-------------------------------------	---------------

Le joueur a fait 5 et la banque a fait 4.

Le joueur décide de s'arrêter à 8

Proba que la banque arrive à B et que le joueur arrive à J

BVJ	8	9	10	11	12	sortir
11	5,75%	5,75%	5,75%	5,75%	1,53%	0,82%
12	5,12%	5,12%	5,12%	5,12%	1,36%	0,73%
sortir	11,81%	11,81%	11,81%	11,81%	3,13%	1,69%

le joueur a gagné	Egalité	le joueur a perdu
51,91%	8,80%	39,31%

proba de gagner – proba de perdre :	12,60%
-------------------------------------	---------------

On a aussi fait les calculs pour l'arrêt à 7, mais c'est moins bon.

En conclusion

Quand la banque est à 5 et que le joueur est à 4, la meilleure stratégie pour le joueur est de **s'arrêter à 8**, car c'est la meilleure différence entre la probabilité de gagner et la probabilité de perdre.

Notes d'édition :

(1) Seulement si les deux événements A et B sont indépendants (ce qui est le cas dans les exemples qu'on considère ici).