

Math en Jeans 2006

# Jeu de Miroirs

Lycée Sud-Medoc / Lycée Montaigne

Verdon Aurélie, Voinier Cécile  
Alexandre Longuet, Vincent Lartaud

en partenariat avec Remi Abgrall (Université Bordeaux 1)

## Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Cas de Solides basiques</b>	<b>2</b>
2.1	Règle des angles d'incidence . . . . .	2
2.2	Les différents cas . . . . .	3
2.2.1	Le cas d'un triangle . . . . .	3
2.2.2	Le cas d'un carré . . . . .	3
2.2.3	Le cas d'un cercle . . . . .	4
<b>3</b>	<b>Solide en L</b>	<b>5</b>
<b>4</b>	<b>Le cas particulier d'un cylindre</b>	<b>6</b>
4.1	Recherche du trajet minimum . . . . .	6
4.2	Approximation de $\pi$ . . . . .	7
<b>5</b>	<b>Vers une autre piste</b>	<b>8</b>

# 1 Introduction

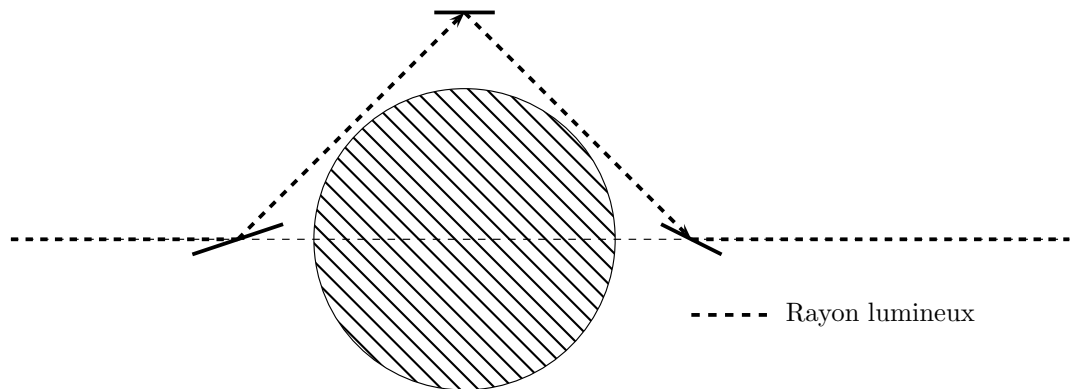
Le problème sur lequel nous avons travaillé est le suivant :

**Un faisceau lumineux se trouvant interrompu par la présence d'un solide opaque, le but est de contourner ce solide en utilisant des miroirs de telle façon que le faisceau retrouve la même direction qu'il suivait au départ.**

L'intérêt est soit de minimiser la longueur du trajet parcouru par le rayon lumineux, soit de minimiser le nombre de miroirs.

## 2 Cas de Solides basiques

On peut constater que quelque soit le solide considéré, il suffit de trois miroirs pour le contourner tel que le présente le schéma ci-dessous.

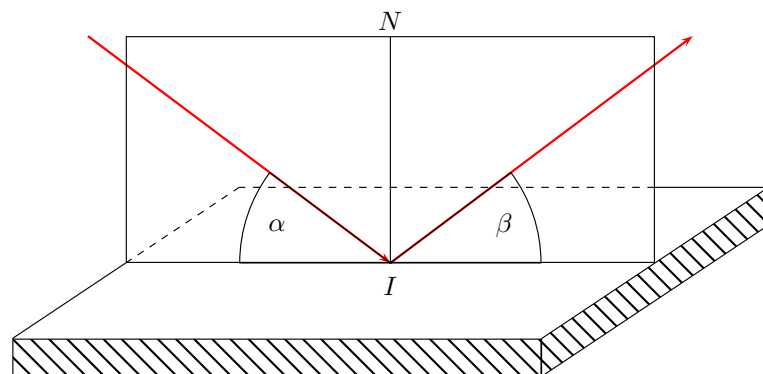


En effet, quelque soit le solide considéré, celui-ci peut être placé dans un cylindre. Ce qui veut dire qu'il faut toujours trois miroirs pour répondre au problème. Il s'agit ici donc du nombre minimum de miroirs nécessaires pour contourner avec un rayon lumineux tout obstacle.

### 2.1 Règle des angles d'incidence

Nous allons préciser ici la règle concernant le comportement d'un rayon lumineux réfléchi par un miroir plan. Cette règle fût énoncée par **Descartes** en 1637. Il s'agit de la règle d'incidence (il existe aussi la règle de réfraction).

Considérons un rayon lumineux qui vient frapper le miroir plan au point  $I$ . En  $I$  élevons la perpendiculaire ( $IN$ ) au miroir. Le rayon incident et la perpendiculaire définissent un plan appelé plan d'incidence.



La loi de **Descartes** est double.

1. Le rayon réfléchi reste dans le plan d'incidence
2. L'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion  $\alpha = \beta$

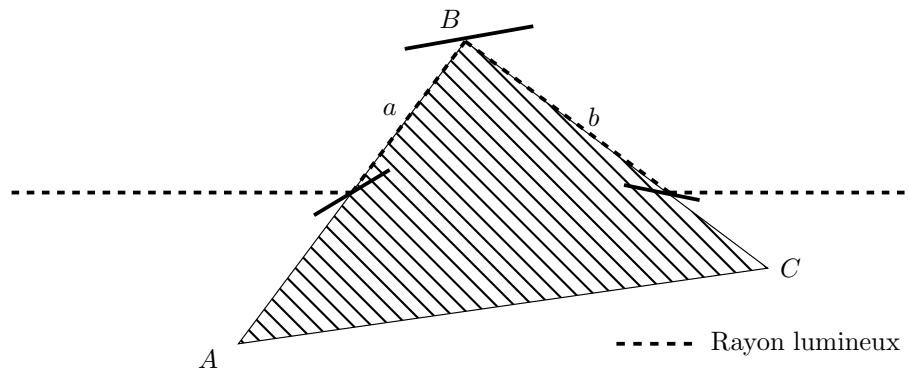
La loi reste valable lorsque la surface est de forme quelconque. La direction perpendiculaire étant alors remplacée par la normale au plan tangent en  $I$  à la surface.

## 2.2 Les différents cas

On va considérer maintenant un certain nombre de situations faisant intervenir des formes simples. Le but est ici de calculer la longueur minimale de parcours du rayon lumineux (que l'on notera  $S_m$ ) et la longueur correspondant au nombre minimal de miroirs c'est-à-dire trois (que l'on notera  $S$ )

### 2.2.1 Le cas d'un triangle

On considère un triangle  $ABC$ . Le schéma ci-dessous présente la situation et la position des miroirs pour obtenir le parcours de distance minimale.

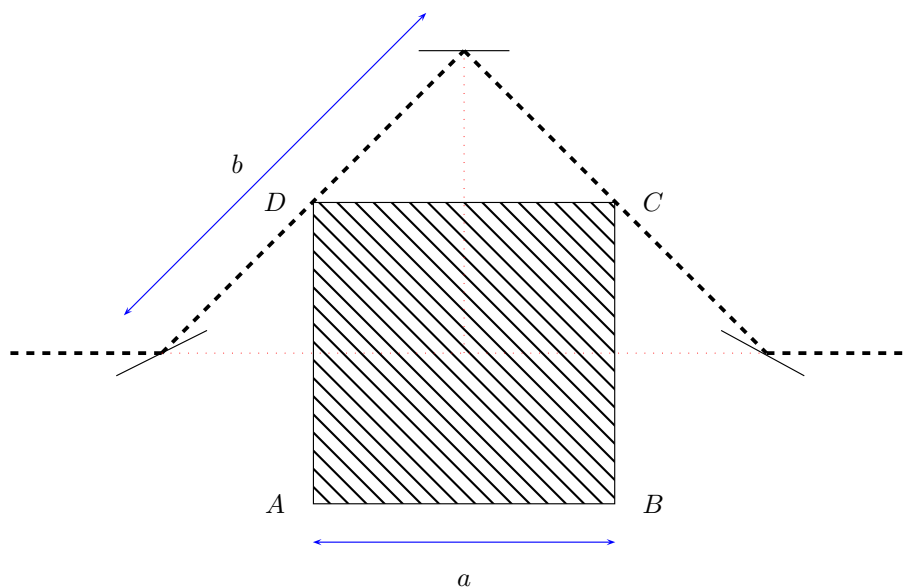


On peut constater que dans ce cas, seuls trois miroirs suffisent pour obtenir le trajet minimum en terme de distance. On a donc en utilisant les notations introduites :

$$S_m = S = a + b$$

### 2.2.2 Le cas d'un carré

On considère maintenant un solide dont la section par un plan contenant le rayon lumineux est un carré. On peut s'apercevoir rapidement que dans ce cas, quatre miroirs sont nécessaires pour obtenir un contournement de l'objet avec un parcours de distance minimale. Le schéma ci-dessous présente la situation pour trois miroirs.

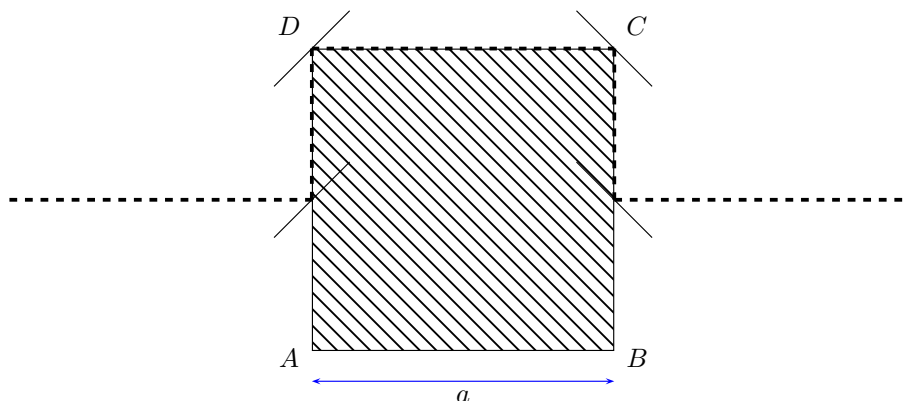


Dans ce cas, en utilisant les notations de la figure, on a :

$$b^2 = a^2 + a^2 \text{ donc } b = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$$

et donc  $S = 2a\sqrt{2}$ .

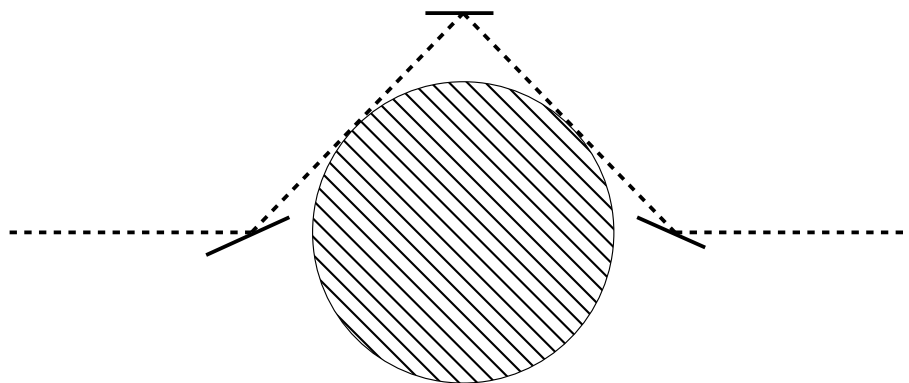
La situation ci-dessous présente la configuration permettant d'obtenir le parcours de distance minimale.



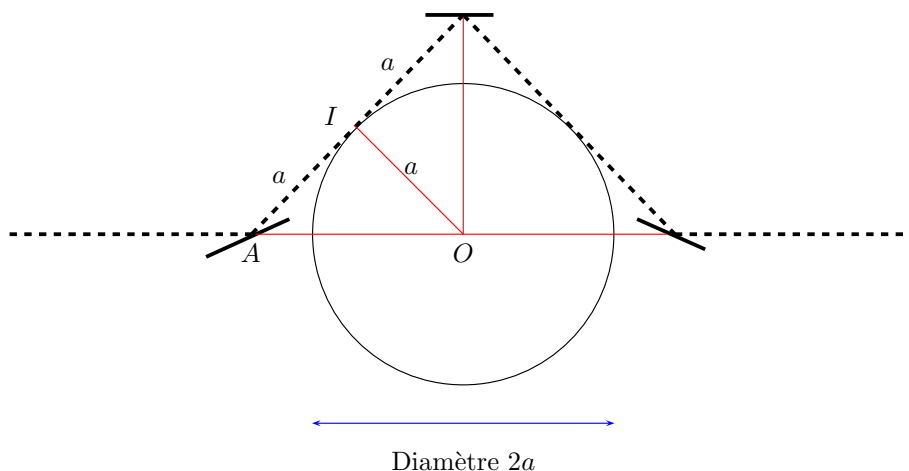
On obtient ici  $S_m = 2a$  soit le demi-périmètre.

**2.2.3 Le cas d'un cercle**

Nous allons maintenant considérer un cylindre. Dans le cadre d'un nombre minimum de miroirs, on obtient la figure suivante.



Dans la situation présentée ci-dessus, si  $a$  est le rayon du cercle, alors le trajet du rayon est ici égal à  $2 \times 2a$  donc  $4a$ . En effet, en notant  $O$  le centre du cercle,  $A$  le point d'impact du rayon avec le premier miroir et  $I$  le point de tangence entre le cercle et le rayon, on constate que le triangle  $AIO$  est isocèle rectangle en  $I$  et donc  $IA = IO = a$ .



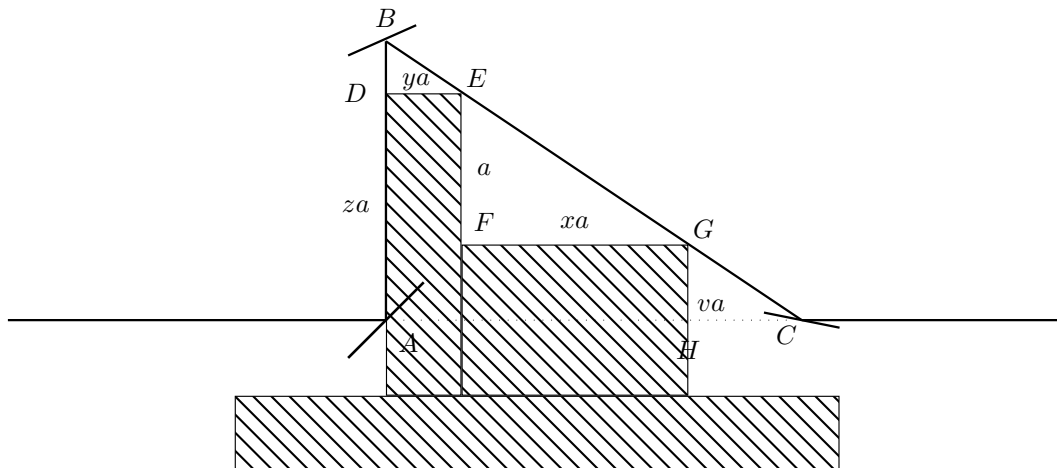
Si par contre, on cherche à réduire le parcours du rayon, on utilise pour cela de plus en plus de miroirs. Le parcours du rayon est alors de plus en plus proche du contour de l'obstacle et donc du demi-périmètre

du cercle dans la situation qui nous occupe.

En fait, plus le nombre  $n$  de miroirs augmente, plus la longueur  $p_n$  du parcours du rayon est proche de  $\pi a$  qui est la longueur du demi-périmètre. Nous nous intéresserons plus en détail à ce phénomène dans la suite de cet article.

### 3 Solide en L

On considère maintenant un obstacle dont le profil présente une forme en  $L$  comme présenté sur le schéma ci-dessous. Nous allons calculer la longueur du trajet minimum. On peut remarquer que ce trajet minimum est aussi celui faisant intervenir le nombre minimum de miroirs.



On introduit pour les besoins des calculs, les points  $A, B, C, D, E, F, G$  et  $H$  tels qu'ils sont placés sur la figure. De plus, on pose  $EF = a$ ,  $FG = x \times a$ ,  $DE = y \times a$ ,  $DA = z \times a$  et  $GH = v \times a$ ,  $a, x, y, z$  et  $v$  étant des nombres réels strictement positifs.

On peut constater que les triangles  $ABC$ ,  $BDE$ ,  $EFG$  et  $GHC$  sont des triangles semblables (leurs angles étant égaux deux à deux).

**Calcul de  $EG$  :**

Dans le triangle  $EFG$  rectangle en  $F$ , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$EG^2 = EF^2 + FG^2 = a^2 + (xa)^2 = a^2 + x^2 a^2$$

et donc  $EG = \sqrt{a^2 + a^2 x^2} = \sqrt{(1 + x^2)a^2} = a\sqrt{1 + x^2}$ .

**Calcul de  $BD$  :**

$EBD$  et  $EFG$  étant des triangles semblables, les mesures de leurs côtés sont proportionnelles deux à deux. On a donc :

$$\frac{BE}{EG} = \frac{BD}{EF} = \frac{DE}{FG} \Rightarrow \frac{BD}{a} = \frac{ya}{xa}$$

Donc  $BD = \frac{ya^2}{xa} = \frac{ya}{x}$ .

**Calcul de  $BE$  :**

Dans le triangle  $EBD$  rectangle en  $D$ , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$BE^2 = BD^2 + ED^2 = \left(\frac{ya}{x}\right)^2 + (ya)^2 = \frac{(ya)^2}{x^2} + \frac{(ya)^2 x^2}{x^2} = \frac{(ya)^2(1 + x^2)}{x^2}$$

et donc  $BE = \sqrt{\frac{(ya)^2(1 + x^2)}{x^2}} = \frac{ya}{x} \sqrt{1 + x^2}$

**Calcul de  $BA$  :**

$$BA = BD + DA = \frac{ya}{x} + za = \frac{ya + xza}{x} = \frac{a(y + zx)}{x}$$

**Calcul de  $HC$  :**

$EFG$  et  $GHC$  sont des triangles semblables. On a donc :

$$\frac{EF}{GH} = \frac{FG}{HC} = \frac{EG}{GC} \Rightarrow \frac{EF}{GH} = \frac{FG}{HC} \Rightarrow \frac{a}{va} = \frac{xa}{HC}$$

et donc  $HC = \frac{xava}{a} = xva$  donc  $HC = xGH$ .

**Calcul de  $CG$  :**

Dans le triangle  $GHC$  rectangle en  $H$ , on applique le théorème de Pythagore. On obtient

$$GC^2 = GH^2 + HC^2 = (va)^2 + (xva)^2 = (va)^2 + x^2(va)^2 = (va)^2(1 + x^2)$$

et donc  $GC = \sqrt{(va)^2(1 + x^2)} = va\sqrt{1 + x^2}$

**Calcul de  $BC$  :**

$$BC = BE + EG + GC = \frac{ya}{x}\sqrt{1 + x^2} + a\sqrt{1 + x^2} + va\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2}\left(\frac{ya}{x} + a + va\right) = a\sqrt{1 + x^2}\left(\frac{y}{x} + 1 + v\right)$$

**Calcul de  $AB$  :**

$$AB = AD + DB = za + \frac{ya}{x} = a\left(z + \frac{y}{x}\right)$$

**En définitive**

Le parcours minimal du rayon lumineux est égal à  $AB + BC$  soit

$$a\left(z + \frac{y}{x}\right) + a\sqrt{1 + x^2}\left(\frac{y}{x} + 1 + v\right) = a\left[z + \frac{y}{x} + \sqrt{1 + x^2}\left(\frac{y}{x} + 1 + v\right)\right]$$

On peut ainsi constater que le parcours minimum est proportionnel à  $a$ .

## 4 Le cas particulier d'un cylindre

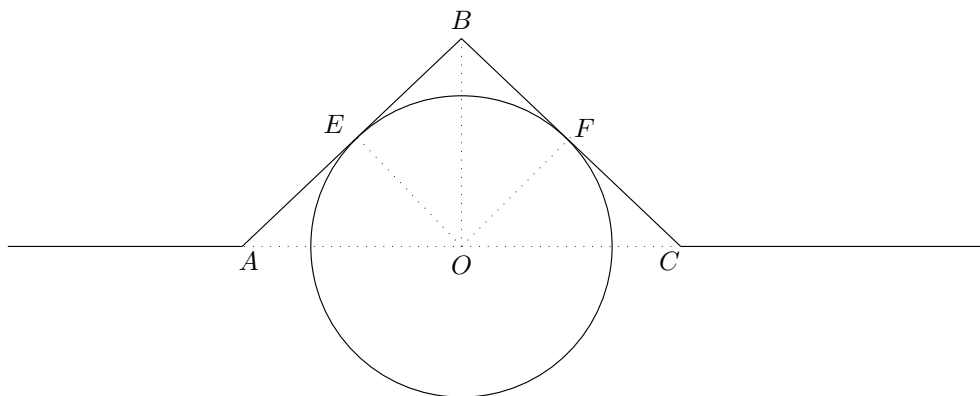
Nous revenons ici sur la situation où l'on doit contourner un obstacle dont le profil est un disque. Nous avons pu voir que plus le nombre de miroirs utilisés est important, plus le trajet du rayon lumineux est court.

### 4.1 Recherche du trajet minimum

On pose  $n$ , le nombre de miroirs utilisés. De plus, on suppose le rayon du disque égal à 1. Nous allons déterminer la longueur du trajet du rayon lorsque l'on utilise  $n$  miroirs.

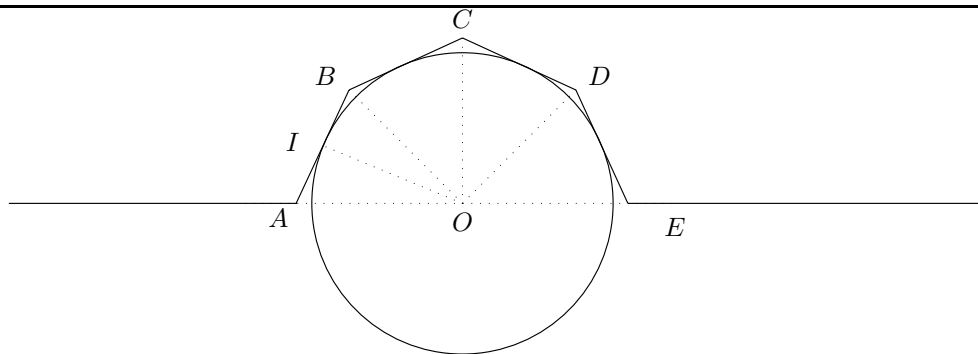
On va de plus supposer que ce nombre de miroirs est impair.

Ainsi si  $n = 3$ , on a la figure suivant :



Si on pose  $x$  la longueur  $AE$ , la longueur du trajet est alors  $4x$ . Or dans le triangle  $AOE$  rectangle en  $E$ , puisque l'angle  $\widehat{AOE} = \frac{\pi}{4}$ , on en déduit que  $\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{AE}{OE} = \frac{x}{1}$ . Donc finalement, on a  $4x = 4 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$ .

Si  $n = 5$ , on a la figure suivante :



On peut constater que le triangle  $AOI$  est rectangle en  $I$  et que  $\widehat{AOI} = \frac{\pi}{8}$ . Donc si on pose  $x = AI$ , on a  $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{AI}{OI} = x$ . Mais le parcours du rayon est ici égal à  $4 \times 2x$  soit donc  $8x$ . On obtient finalement que ce parcours est égal à  $8 \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \simeq 3.313708499$ .  
On peut généraliser les résultats précédents.

Si  $n$  est le nombre de miroirs utilisés, alors la longueur du parcours du rayon lumineux est égal à  $2(n - 1) \tan\left(\frac{\pi}{2(n - 1)}\right)$ .

### 4.2 Approximation de $\pi$

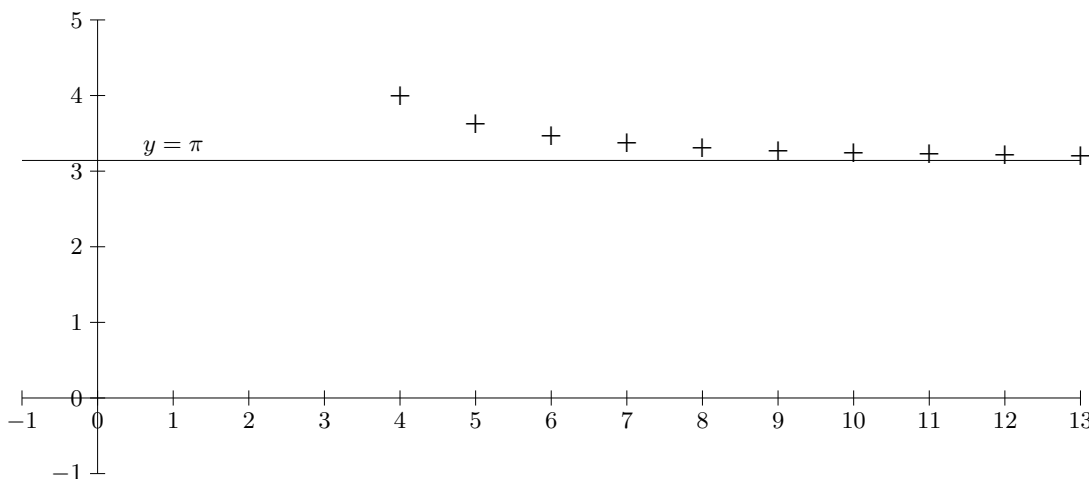
Nous savons de plus que plus le nombre  $n$  de miroirs est important plus le parcours du rayon lumineux est proche de la longueur du demi-périmètre du cercle soit donc  $\pi$  (le cercle est de rayon 1).  
On déduit de cela une méthode pour obtenir une valeur approchée de  $\pi$ .  
Ainsi si  $n = 7$ , on obtient :

$$12 \tan\left(\frac{\pi}{12}\right) \simeq 3.215390309173472477670644$$

Si  $n = 100$ , on obtient :

$$198 \tan\left(\frac{\pi}{198}\right) \simeq 3.141856312054318402160991$$

Il est possible graphiquement de se rendre compte du phénomène qui a lieu ici. Ci-dessous est représenté dans un repère l'ensemble des points  $M_n$  de coordonnées  $(n, n \tan(\frac{\pi}{n}))$  pour  $n$  entier supérieur à 4.

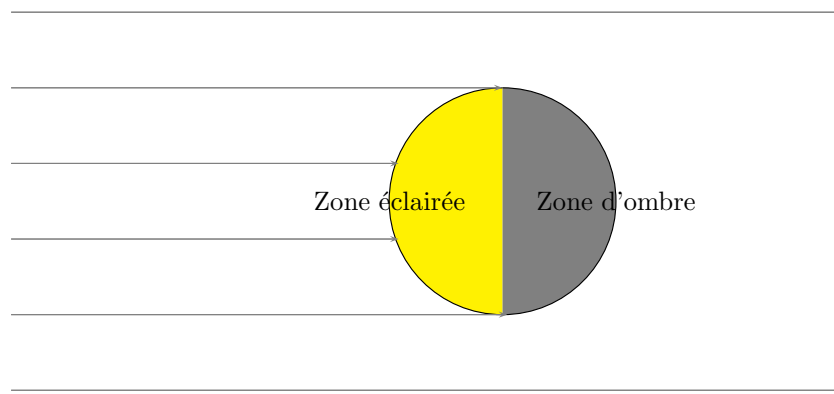


On peut donc constater que les points du nuage sont de plus en plus proches de la droite d'équation  $y = \pi$ , marquant ainsi le fait que plus  $n$  devient grand, plus la valeur  $n \tan(\frac{\pi}{n})$  devient proche de  $\pi$ .  
Cette méthode d'approximation de  $\pi$  passe naturellement par le calcul de la tangente d'un angle. Ceci nous est actuellement permis facilement grâce à une calculatrice ou un ordinateur. Dans le cas inverse, un tel calcul reste difficile à mener.

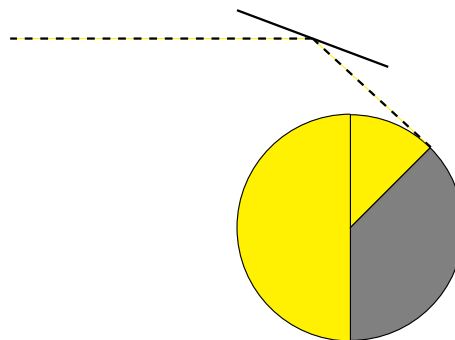
On retrouve dans cette démarche une partie de la technique qu'employa Archimède. En effet, celui-ci pour obtenir une valeur approchée de  $\pi$  encadra la valeur du périmètre d'un cercle de rayon 1 par la valeur du périmètre d'un polygone inscrit dans ce cercle et par la valeur du périmètre d'un polygone circonscrit au cercle. En augmentant le nombre de côtés des deux polygones, il est possible d'approcher de façon satisfaisante la valeur du périmètre du cercle. On obtient ainsi un encadrement de  $\pi$ .

## 5 Vers une autre piste

Nous allons examiner maintenant une autre situation mettant là encore en jeu des miroirs. Il s'agit de considérer une sphère placée dans un éclairage unidirectionnel.

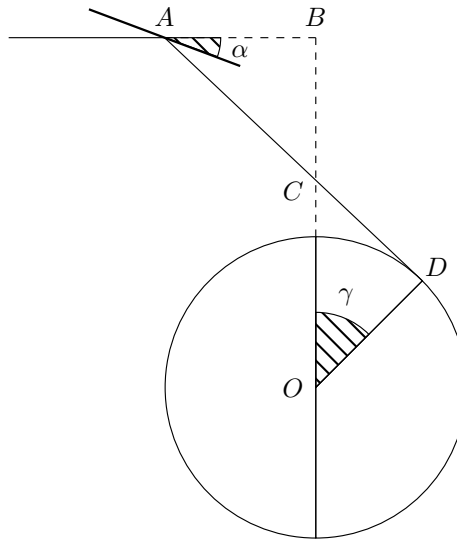


Le but est de savoir combien de miroirs il nous faut pour faire en sorte que toute la surface de la sphère soit éclairée. Nous allons examiner la situation dans laquelle nous utilisons un miroir plan de grandeur variable. On a donc la situation ci-dessous :



Nous allons voir qu'il existe une relation entre l'angle que forme le miroir avec le rayon incident (que l'on note  $\alpha$ ) et l'angle de la zone d'ombre qui se retrouve éclairée par le biais du miroir (que l'on note  $\gamma$ ).





La configuration ci-dessus permet facilement d'en conclure que  $2\alpha = \gamma$ . En effet, les triangles  $ABC$  et  $OCD$  sont semblables.

On en déduit que plus l'angle que forme le plan du miroir avec le rayon incident est grand et proche de  $90^\circ$ , plus la surface éclairée par les rayons réfléchis est grande. Cependant, on peut constater qu'il existe une contrainte liée au fait que le miroir doit être placé au point de concours d'un rayon et de la tangente au point  $D$  du cercle de centre  $O$  représentant la sphère. Plus précisément, la position la plus proche du miroir est donnée par cette intersection donc si on augmente  $\gamma$ , on voit que le miroir va à l'infini.

Cette contrainte implique qu'il n'est pas possible d'éclairer toute la surface de la sphère avec un seul miroir.