N! , une histoire de 0

BELFROY Kathelyn, DASTE Loréna, LETELLIER Hector, ELMOUATS Lucien, HISQUIN Léon, BIDEAU Etienne, DAAS Matthieu.

Collège Charles Péguy à Palaiseau
Collège Alain Fournier à ORSAY.
Enseignants : Mme DAMONGEOT, Mme FERRY et M. FOURNIER.
Chercheurs : Olivier COULAUD et Aurélien POIRET.

Sujet

Soit N un entier strictement positif. On appelle factorielle N, et on note $N!$, le produit de tous les entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à N.
Par exemple :
$1!=1$
$2!=2\times1=2$
$3!=3\times2\times1=6$
Peut-on déterminer par combien de 0 se termine N! ?

Mots-clés

FACTORIELLE, ZÉRO, MULTIPLE, DIVISIONS EUCLIDIENNES, FACTEURS

Nos premiers essais

Tout d'abord, nous avons calculé des factorielles à la main. Rapidement, nous avons pris la calculatrice : ce travail était long et fastidieux. Nous avons ainsi calculé jusqu'à 13! Au delà, la calculatrice indique le résultat en notation scientifique : nous ne sommes alors pas sûrs du nombre de 0 à la fin du résultat, qui peut être arrondi.

Avec un tableur, nous obtenons quelques résultats supplémentaires : jusqu'à 17!

N	N!	Nombre de 0 à la fin de N!
1	1	0
2	2	0
3	6	0
4	24	0
5	120	1
6	720	1
7	5040	1
8	40320	1
9	362880	1
10	3628800	2
11	39916800	2
12	479001600	2
13	6227020800	2
14	87178291200	2
15	1307674368000	3
16	20922789888000	3
17	355687428096000	3
18	6,40E+015	?

Y a-t-il une suite logique concernant le nombre de 0 ?

Nous avons recherché les rapprochements entre les nombres et les sauts de 0 qui avaient l'air d'être réguliers. Ainsi, en observant le précédent tableau, nous nous sommes aperçus qu'un nouveau 0 apparaissait à chaque fois qu'on prenait la factorielle d'un nombre augmenté de 5.

Nous avons donc conjecturé que le nombre de 0 correspondait au nombre de multiples de 5 apparaissant dans le développement de N!

Facteur 2, facteur 5, facteur 10

Dans le développement de $N!$, si on range les facteurs dans l'ordre croissant, tous les 5 facteurs apparaît un multiple de 5 ; dans les 4 facteurs précédents il y a 2 facteurs pairs donc multiples de 2. En regroupant le multiple de 5 avec un multiple de 2, nous obtenons un multiple de 10.

Donc à chaque fois qu'apparaît un multiple de 5 il apparaît également un multiple de 10 et donc un 0 apparaît.

Voici un exemple avec 12!

Dans la décomposition , il y a 2 multiples de 5:

- 5 qui multiplié par 2 donne 10
- et 10.

On peut donc écrire 12! sous la forme du produit d'un nombre a par 10×10 , sachant avec certitude que a n'est pas un multiple de 10 et n'a donc pas de 0 à la fin de son écriture.

12!=1×2×3×4×5× 6×7×8×9×10 ×11×12

=a×(2×5)×10

=a×10×10

où a est un nombre entier non multiple de 5 donc non multiple de 10.

Il y a donc 2 zéros à la fin de 12!.

Constatation

Seulement une conjecture n'est qu'une conjecture. Nous avons donc réalisé des recherches plus approfondies. Nous avons continué nos calculs et lorsque nous sommes arrivés à 25! , il y avait 6 zéros et non 5 comme prévus par notre conjecture ; nous avons donc cherché la raison de ce changement: pourquoi le saut était-il de 2 zéros et non d'un seul ?

Voici un décomposition très détaillée de 25!: 1×2×3×(2×2)×5×(3×2)×7×(4×2)×9×10×11×(6×2)×13×14×15×(8×2)×17×(9×2)×19×20×21×(11×2)×23×(12×2)×**(5×5)**

Il y a 2 facteurs 5.

25!=	1×2×...	×6×...	×11×...	×16×...	...×25
Calcul donnant un multiple de 10	2×5 = 10	10	12×15 = 180	20	24×25 = 600
Nombre de 0	1	1	1	1	2

Puissances de 5 : nouvelle conjecture

Comme nous l'avons vu, chaque multiple de 5 fait apparaître un zéro supplémentaire à la fin du nombre.

? Mais lorsqu'un 25 apparaît dans la décomposition de notre factorielle, 25 contenant 2 facteurs 5 , il apparaîtra alors 2 zéros, donc 1 zéro de plus que prévu; de même lorsqu'un multiple de 125 apparaît, 125 contenant 3 facteurs 5, il apparaîtra alors 3 zéros, donc 2 zéros de plus que prévu; et ainsi de suite.

[Il faudrait s'assurer qu'il y a toujours assez de facteurs 2 à associer aux facteurs 5]

Exemple:

$5=5^1$ donc 1 zéro apparaît

$25=5^2$ donc 2 zéros apparaissent

$125=5^3$ donc 3 zéros apparaissent

Pour 5^n : *n* zéros apparaissent.

[Dans la suite on suppose acquis qu'il apparait autant de 0 dans N! qu'il y a de facteurs dans la décomposition complète de N]

Division euclidienne

Il reste à trouver une méthode pour trouver le nombre de zéros à la fin de *N*! sans avoir à tout décomposer pour retrouver les facteurs de 5, 25, 125, 625 …

Exemple avec un nombre N compris entre 1 et 24 :

Reprenons notre exemple de 12! Comment trouver le nombre de multiples de 5 dans le développement de 12! ?

12 = 2×5+2

donc il y a 2 facteurs 5.

Pour obtenir ce 2, on peut faire la division euclidienne de 12 par 5 et prendre le quotient entier. Ainsi, la *partie entière* de 12/5 *nous donne le nombre de multiples* de 5 et donc le nombre de sauts de 0.

Exemple avec un nombre compris entre 25 et 124 : choisissons 59!

On présente deux méthodes :

- **La première méthode** consiste à procéder comme dans l'exemple précédent.

59 = 11×5+4

Il y a donc 11 multiples de 5 dans la décomposition de 59!

Mais comme 59 est compris entre 25 et 124, le nombre 25 apparaît également dans la décomposition. Combien de fois ?

59= 2×25+9

Il y a donc 2 multiples de 25 (25 et 50).

[Chaque multiple de 25 ajoute un facteur 5 à celui qui est déjà compté]

Conclusion : il y a en tout 11 + 2 = 13 zéros à la fin du nombre 59! .

Vérifions :

59! = 1×...×5×...×2×5×...×3×5×...×4×5×...×5×5×...×6×5×...×7×5×...×8×5×...×9×5×...×2×5×5×...×11×5×...×59

Il y a bien 13 facteurs 5 qui donneront 13 multiples de 10 et donc 13 zéros.

Remarque générale : pour un nombre *N* très grand, il faut déterminer un encadrement de *N* entre deux puissances de 5 successives (qu'il faut donc connaître...)

Exemple : si N = 18721, 15625 < 18721 < 78125, $5^6 < 18721 < 5^7$

(le symbole « inférieur ou égal » est utilisé car N peut être un multiple de 5).

Il faudra calculer les quotients entiers des divisions euclidiennes de 18721 par 5, 25, 125, 625, 3 125 et 15 625 (5^6).

- **La deuxième méthode** consiste à ne faire que des divisions euclidiennes par 5.

Exemple avec 59 (59!). :

59=11×5+4

Il y a donc 11 multiples de 5 dans la décomposition de 59!

[On poursuit avec]

$1=2\times5+1$

On obtient donc :

$59=(2\times5+1)\times5+4 =2\times5\times5+1\times5+4$

Cette écriture permet d'affirmer qu'il y a 2 multiples de 25.

Le quotient entier de 11 (qui est le quotient entier de la division euclidienne de 59 par 5) par 5 est égal au nombre de facteurs 25. Puisque ce nombre est strictement inférieur à 5, le processus s'arrête : [il n'y a aucun multiple de 5^p avec p entier supérieur à 3. Nous retrouvons 11+2=13 facteurs 5 dans la décomposition de 59!, donc 13 facteurs 10 et donc 13 zéros.

Remarque : L'intérêt de cette méthode est de ne pas avoir à déterminer un encadrement de N par deux puissances de 5 successives.

Le processus se termine dès que le quotient entier est strictement inférieur à 5.

Conclusion

Pour trouver le nombre de 0 à la fin de *N*!, deux méthodes sont possibles:

(i) On effectue la division euclidienne de *N* par 5 et on prend le quotient entier. (ce qui revient à prendre la partie entière de *N*/5); ceci nous donne le nombre de multiples de 5 et donc un premier nombre x_1 de 0, à la fin de *N*!. Il faut ensuite trouver le nombre de multiples de 25; pour cela, on effectue le quotient entier de la division euclidienne *N*/25, qui est égal à x_2 , le nombre de 0 supplémentaires . Tant que le quotient entier de la division euclidienne $N/5^p$ n'est pas nul, on continue ce procédé.

Enfin on additionne les nombres x_i de 0 trouvés.

(ii) On effectue la division euclidienne de *N* par 5. Le quotient entier obtenu est divisé par 5; on garde à nouveau le quotient entier que l'on divise par 5 et ainsi de suite. Le processus s'arrête lorsque le quotient entier est strictement inférieur à 5 :

Considérons N ! Notons q_i le quotient entier et r_i le reste des divisions euclidiennes aux différentes étapes.

$N=5\times q_1+r_1$

$q_1=5\times q_2+r_2$

$q_2=5\times q_3+r_3$

Le processus s'arrête lorsque q_k est strictement inférieur à 5.

Le nombre total d'apparitions du facteur 5 dans la décomposition de N! est :

$q_1 + q_2 + q_1 + \ldots + q_k$

[Pour que ceci soit bien le nombre de 0 à la fin de N! il faudrait vérifier que $2^{q1+\ldots+qk}$ divise N!]

***

Annexe : Programmation

Nos chercheurs nous ont aidés à réaliser un programme avec le logiciel Scilab qui calcule directement le nombre de 0 à la fin d'une factorielle selon la méthode (i) et donc, réalise cet algorithme...bien plus vite que nous.

```
function [N]=factorielle(x)
i=1;
N=0;
while floor(x/5^i) > 0,
 N=N+floor(x/5^i),
  i=i+1,
end
endfunction
```

Le défaut de ce programme est qu'il ne fait pas vraiment mieux que le tableur puisque, quand N est trop grand, il est arrondi. L'avantage est qu'il reste plus rapide.