Noir, c'est noir

Année 2021 – 2022

Élèves : Célia Lamoureux, élève de 2nde et Louise Rey, élève de 1ère.

Encadrés par : Caroline Rougerie et Marie-Agnès Binois

Établissement : Lycée Maurice Genevoix, à Ingré

Chercheur : Philippe Grillot , enseignant chercheur à l'université Dennis Poisson

1. Présentation du sujet

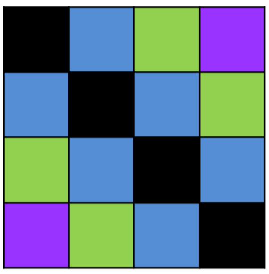
Il est donné un damier avec n cases de côté et quelques cases initialement noircies à l'intérieur.
La condition pour colorier une case est qu'elle possède au minimum deux cases voisines noircies, c'est-à-dire que cette case est reliée à ses voisines par un côté commun.
Nous cherchons à savoir comment nous pouvons trouver le nombre minimal de cases pour pouvoir colorier tout le damier.

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Nous avons établi qu'il faut n cases initialement noircies au minimum pour colorier l'entièreté du damier et que cela suffit si elles sont disposées correctement..

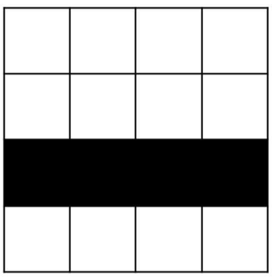
3. Notre article

a) Observations

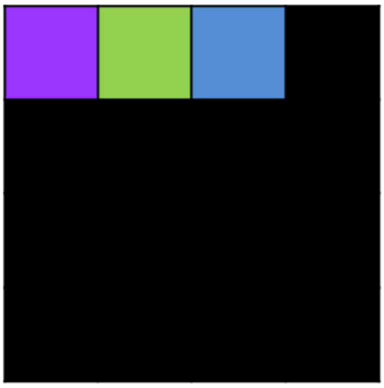


☆ Avec une diagonale entièrement noircie au départ, il sera toujours possible de colorier tout le damier.

Résultat : Bien disposées, n cases suffisent !



☆ Lorsqu'uniquement une ligne ou une colonne est coloriée, il est impossible de colorier d'autre cases.

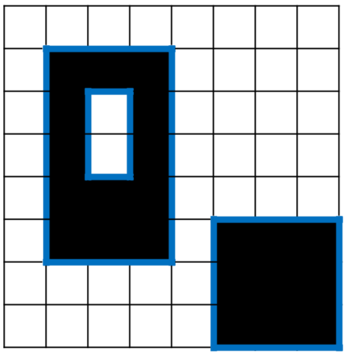


☆ Pour être assuré de colorier tout le damier, peu importe la disposition des cases noircies si, initialement, $n^2 - (n-1)$ cases sont coloriées.

b) Le périmètre

On appelle **périmètre** le nombre de « côtés unités » du contour de la forme coloriée.

Exemple :



Ainsi en additionnant les deux contours on obtient :

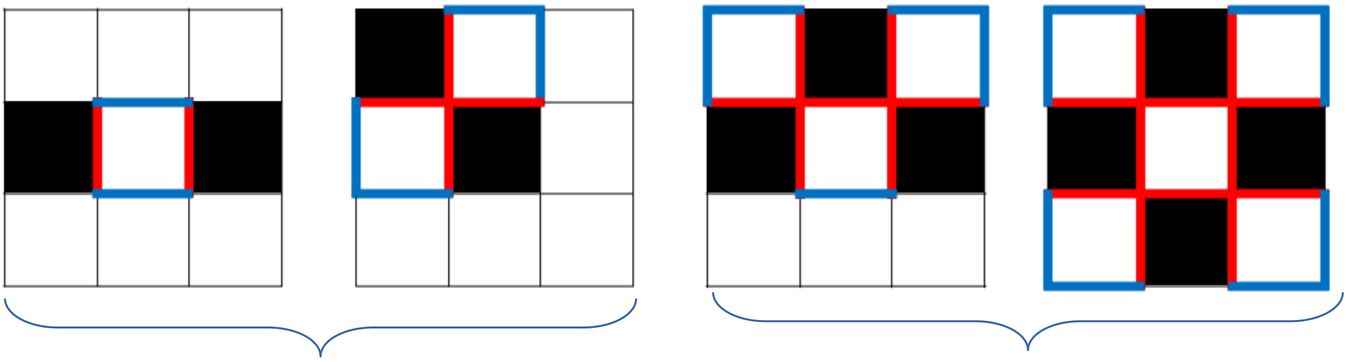
$22 + 12 = 32$

Le périmètre vaut alors 32.

Propriété : Étape après étape, le périmètre n'augmente jamais : il reste constant ou diminue.

Démonstration :

Il n'existe que 4 manières de colorier une case :



Dans ces deux cas le périmètre stagne puisque, pour colorier une case, il lui faut 2 voisines coloriées donc on aura autant de cotés qui ne font pas partie du nouveau périmètre (en rouge) que de nouveaux côtés (en bleu) avec le coloriage de la nouvelle case.

Dans ces deux cas le périmètre diminue car une des cases possèdent plus de deux voisines coloriées donc on aura plus de côtés qui ne font pas partie du nouveau périmètre (en rouge) que de nouveaux côtés (en bleu) avec le coloriage des nouvelles cases.

c) Comment évolue le périmètre ?

Avec un damier de n cases, le périmètre total vaudra $4n$.
Étant donné que le périmètre ne peut pas augmenter, il doit stagner pour permettre de colorier l'entièreté du damier.

Étudions tous les cas possibles :

Avec un nombre de cases initialement coloriées strictement inférieur à n :

- Le périmètre initial est strictement inférieur à $4n$.
- Il est donc impossible de colorier tout le damier (puisque le périmètre stagne ou diminue et ne pourra donc pas atteindre $4n$).

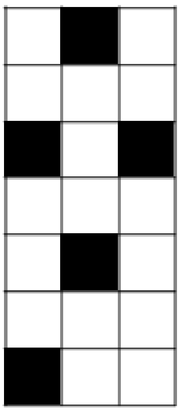
Avec un nombre de cases initialement coloriées supérieur ou égal à n :

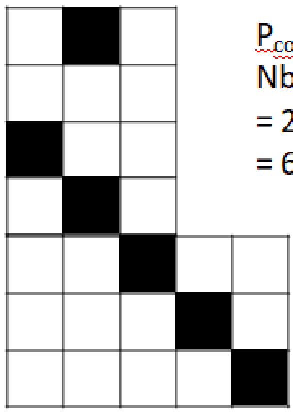
- Le périmètre initial est supérieur ou égal à $4n$.
- Il sera alors possible de colorier tout le damier (nous avons vu une disposition à n cases noircies qui convient).

Et si notre damier n'était pas carré ?

Nous nous sommes intéressées au nombre de cases minimales qu'il faudrait si notre damier n'était pas un carré.

$P_{contour}$ = 20
Nb cases = P_c/4
= 20/4
= 5





$P_{contour}$ = 24
Nb cases = P_c/4
= 24/4
= 6

Étant donné qu'une case possède 4 cotés et que le périmètre ne peut pas diminuer, nous avons déduit que le périmètre total des cases doit au minimum être égal au périmètre du damier.

Ainsi pour trouver le nombre de cases minimal, nous pouvons utiliser la formule : P contour/4.

e) Et si nos cases n'étaient pas carrées ?

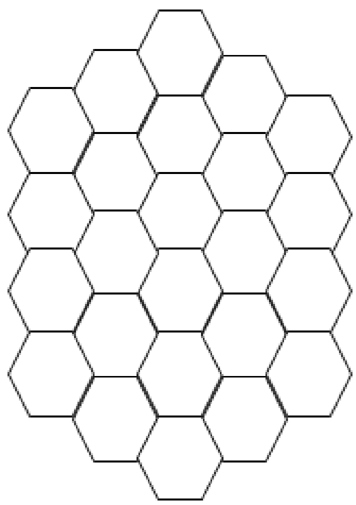
La formule pour calculer le nombre de cases initiales ne peut pas s'appliquer ici.

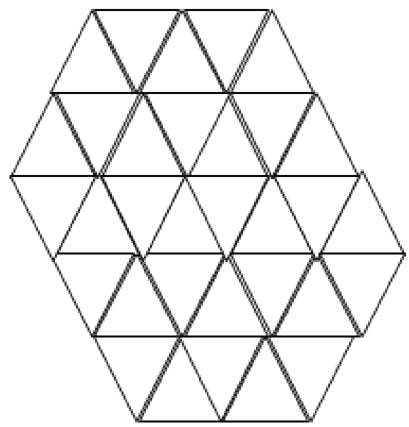
Dans le premier cas où les cases sont des hexagones, on a remarqué que deux cases suffisent pour colorier l'ensemble du damier. Le périmètre augmente donc.

Dans le deuxième, il diminuera.

Nous avons constaté que lorsque le nombre de cotés d'une case est supérieur à 4, le périmètre augmentera. Il faut par conséquent moins de n cases coloriées.

De la même manière si le nombre de cotés d'une case est inférieur à 4, le périmètre diminuera. Il faut plus de n cases coloriées.





4. <u>Conclusion</u>

Ainsi nous pouvons dire qu'il faut au minimum n cases pour pouvoir colorier un damier de coté n. Néanmoins lorsque la forme du damier change nous devrons utiliser la formule : Nb cases = $P_c/4$ pour trouvé le nombre de cases minimal. Si les cases ne sont plus carrées, deux cas se présentent. Si le périmètre est supérieur à 4, alors il faudra moins de n cases (le périmètre augmente). À l'inverse si le périmètre est inférieur à 4, il faudra plus de n cases (le périmètre diminue).