Le nombre chromatique du plan

Cet article est le résultat d'un travail mené dans le cadre d'un atelier MATh.en.JEANS par des élèves **des Lycées Montaigne de Bordeaux et Sud Médoc du Taillan-Médoc** durant l'année scolaire **2011-2012**.

Liste des élèves :

Candice GIFFARD, Margaux FLEURY, Coline DIMBOURG, Kenza BOBST, Lucas BALZAMO, Inès BELHADJ, Adélaïde TOPRES, Caroline CUER, Chloé GIROUX,

Marine GUILLOCHEAU, Emmanuelle PRETOT, Florian CAILLEAU, Nathan BONORON, Léa COLAQUY, Margaux CHENIER.

Professeurs :

Olivier CARCONE, Dominique GRIHON, Pierre GRIHON, Sébastien MAIMARAN

Chercheur :

Christine BACHOC, Université BORDEAUX 1

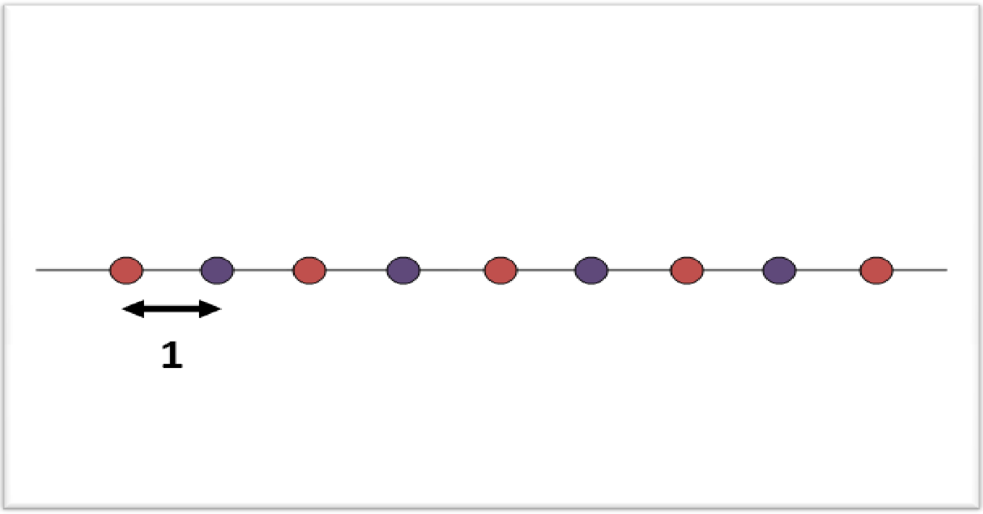
Le nombre chromatique du plan : c'est le nombre minimum de couleurs qu'on doit utiliser afin de colorier entièrement le plan en respectant la condition suivante : deux points de même couleur ne peuvent se trouver à une distance 1 ! Notons *N* ce nombre.

Nous allons démontrer dans cet article que : $4 \leq N \leq 7$**.**

Pour cela, nous allons nous placer successivement sur une droite, sur un cercle et sur un pavage hexagonal.

I. Sur une droite

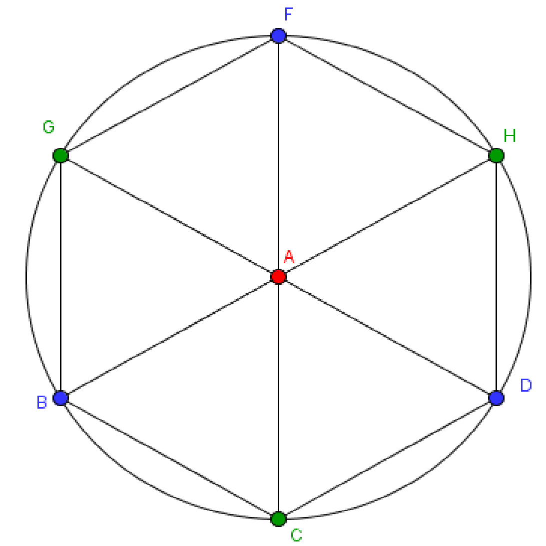
Avant d'étudier la situation dans le plan, il nous a paru naturel de regarder ce qui se passe si on simplifie le problème en se plaçant sur une droite.



Sur un segment [AB] de longueur 1, A et B ne peuvent pas être de la même couleur mais tous les points de [AB[peuvent avoir la même couleur que A.

On peut donc remplir la droite avec seulement deux couleurs donc le nombre chromatique d'une droite est 2.

II. <u>Dans un cercle</u>

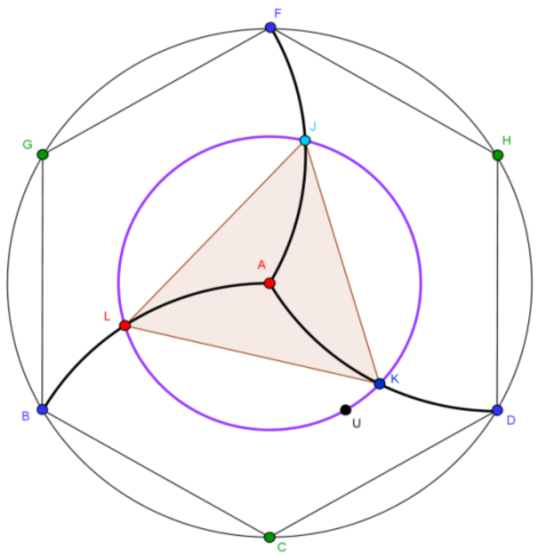


On se place dans un cercle de rayon 1 et on y inscrit un hexagone régulier dont les sommets sont donc à distance 1 : il faut deux couleurs pour les colorier.

Le centre du cercle doit donc être d'une troisième couleur.

Donc le nombre chromatique du plan est supérieur ou égal à 3. .

Montrons que 3 couleurs ne suffisent pas.

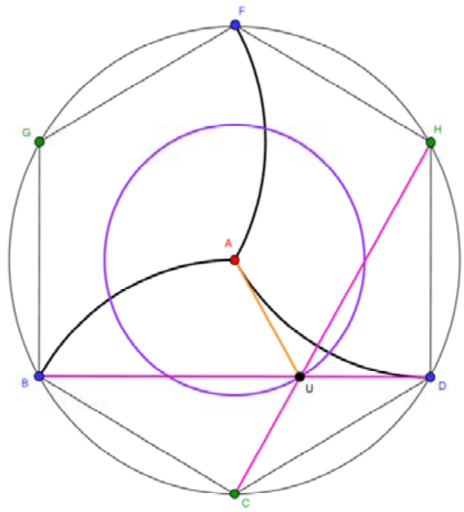


Pour colorier A,B,C,D,E,F,G avec trois couleurs, la seule solution est celle décrite précédemment. On la prend donc comme point de départ.
On se place dans le grand cercle et on trace les trois arcs de cercle dont le centre est un point vert (H, C et G) et de rayon 1 et on suit le raisonnement suivant :
On veut colorier le point K situé sur l'arc de cercle de centre H, et donc à distance 1 du point vert H. Ainsi il ne peut pas être vert, on le colorie alors en bleu (arbitrairement).
Ensuite faisons de même avec le point L de l'arc de cercle dont le centre est le point vert C et donc à distance 1 de celui-ci. De plus, on veut qu'il soit à distance 1 du point K bleu. Le point L ne peut donc pas être ni vert et ni bleu, on choisit alors de le colorier en rouge (la seule couleur restante) (1)
Enfin on cherche à colorier le dernier point J situé sur l'arc de cercle de centre le point G vert et donc à distance 1 de celui-ci. De plus pour former le triangle équilatéral on souhaite que J soit à distance 1 de L et de K. Ainsi J ne peut ni être bleu, ni rouge, ni vert ! Une quatrième couleur est donc nécessaire (ici bleu clair)

Mais le triangle JKL existe-t-il vraiment ?!

Prouvons qu'un triangle équilatéral de côté 1 dont les sommets sont sur les trois arcs de cercles existe et que son centre de gravité est A.

Soit un triangle MNP équilatéral quelconque de côté 1 de centre de gravité G. Soit H le pied de la hauteur issue de M. Quel est le rayon de son cercle circonscrit ?
On a GM=2/3 HM.
$HM^2=MP^2-HP^2 = 1 - (1/2)^2 = 3/4$ donc $HM=\frac{\sqrt{3}}{2}$ et finalement $GM=\frac{\sqrt{3}}{3}$.
Donc un triangle équilatéral MNP est inscrit dans un cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}$ de centre G, le centre de gravité de MNP.
Construisons maintenant le triangle équilatéral JKL de la manière suivante (voir figure ci-dessous)
On construit le cercle de centre A et de rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}$ à l'aide du point U intersection de (BD) médiatrice de [AC] et (CH) médiatrice de [AD]. Donc U centre de gravité du triangle équilatéral ACD de côté 1. Donc $AU=\frac{\sqrt{3}}{3}$ et donc U appartient au cercle de rayon $\frac{\sqrt{3}}{3}$ de centre A.
Ce cercle coupe les trois arcs de cercle de centres H, C, G en K, L, J.
Par la rotation de centre A et transformant B en D (donc d'angle 120°) l'arc ce cercle AB devient l'arc AD et donc L devient K puis de même K devient J. KLJ est donc équilatéral.



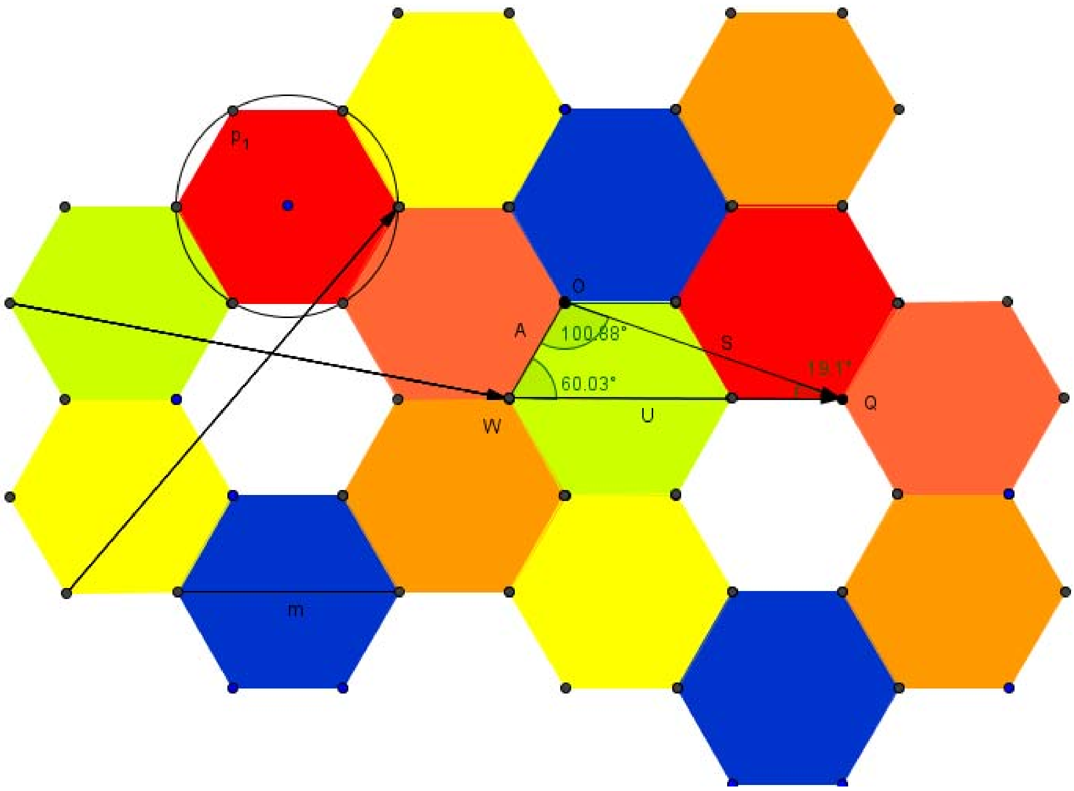
Théorème 1: Le nombre chromatique *N* du plan est donc supérieur ou égal à 4.

III. Dans le plan

Dans cette partie, nous allons décrire une méthode pour colorier le plan avec seulement sept couleurs en respectant la contrainte de distance donnée au départ : deux points à distance 1 doivent être de couleurs différentes.

Pour cela, on construit une fleur formée de sept hexagones réguliers tous de couleurs différentes (celui du centre est blanc).

En utilisant les deux translations dont les vecteurs sont dessinés sur la figure, on montre que l'on peut paver le plan à l'aide de cette fleur.



On pose **m** le diamètre du cercle circonscrit de l'un des hexagones.

A première vue, ce type de pavage, par translation d'une « fleur » de 7 hexagones réguliers identiques de couleurs différentes, semble nous permettre de colorier tout le plan avec uniquement 7 couleurs, sans qu'aucun point à distance 1 ne soit de même couleur ... Mais comment le prouver ?

Prenons, de façon arbitraire, m=0,9 de manière à ce que deux points situés sur les côtés d'un hexagone soient à distance inférieure à 1. Donc le côté de l'hexagone vaut 0,45.

La distance la plus courte entre 2 hexagones de même couleur est représentée par le segment S. Nous voulons savoir si cette longueur est bien supérieure à 1.

Il existe une relation entre les côtés d'un triangle quelconque et les sinus des angles opposés.

Dans le triangle WOQ, d'après le théorème des sinus :

$$\text{Sin (OWQ)/OQ} = \text{sin (OQW)/OW}$$

D'où: Sin(OWQ)/S = sin(OQW)/0,45 donc S=0,45Sin(OWQ)/Sin(OQW) $\approx$ 1,19.

Tel que nous pouvons le voir sur la figure, ce segment représente la distance la plus courte entre n'importe quels hexagones de même couleur. On peut donc en conclure que, grâce à ce pavage, **il n'existe aucune paire de points situés à distance 1 qui soient de la même couleur.** On en déduit le théorème :

Théorème 2 : Le nombre chromatique *N* du plan est inférieur ou égal à 7.

Note d'édition

(1) Cette phrase est un peu étrange car elle ne définit pas de point particulier, contrairement à ce que le point L suggère.