

La numération “l’histoire des mathématiques”

par Cécile Arnaud, Benjamin Letellier, Cécil Tirard, Isabelle de Azevedo, Corine Liard, Bruno Mathieu, Michaël Cormont
du Lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise
et du Lycée Fragonard de l’Isle-Adam

enseignantes : Mmes Annick Boisseau, Anne Kérharo et Annie Soismier.

chercheur : Mme Michèle Vergne, Département de Mathématiques et d’Informatique de l’Ecole Normale Supérieure.

Au tout début de l’année scolaire, avant le 1^{er} séminaire, nous avons essayé de comparer les différentes façons d’écrire les nombres, suivant les civilisations. Nous avons alors pour objectif de savoir quelles étaient les civilisations dont l’écriture mathématique était la plus rapide, afin de découvrir le peuple dont le mode d’écriture était le plus intéressant et que nous choisirions d’étudier ultérieurement. Les résultats de cette étude (nous avons chronométré le temps mis pour écrire un même nombre par différents systèmes) ont alors montré que le système chinois était plus rapide et plus facile à écrire que le maya, celui-ci étant lui-même plus simple que l’égyptien. Les autres civilisations ne nous ont pas paru moins intéressantes, mais nous avons décidé de pousser plus loin nos recherches sur ces trois-là.

Les seules mentions numériques que nous possédons aujourd’hui de l’arithmétique des Mayas ne se rapportent qu’à l’astronomie ou au comptage du temps. Les Mayas, en effet, possédaient deux calendriers dont ils usaient simultanément : le premier, dit “Tzolkin”, de caractère religieux (calendrier magique) et le second, dit “Haab” qui fut un calendrier solaire. L’année liturgique se composait de 20 cycles de 13 jours : elle comptait donc 260 jours.

Avertissement au lecteur :


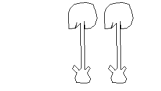





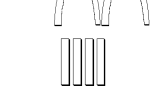


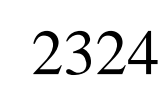



A cet emplacement, et tout au long de la brochure, vous trouverez les lois émises par les écoliers de l’école Frédéric Mireur de Draguignan, qui ont travaillé en relation avec M. Marc Hindry, mathématicien, Jussieu.

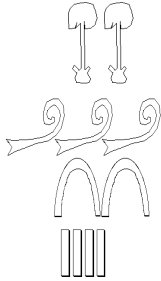
En raison de leur caractère sacré, les 13 jours fondamentaux étaient mis en relation avec des divinités ou des objets sacrés. Chaque division (jours, mois, années, périodes plus longues) du calendrier maya était des fardeaux que portaient sur leur dos les dieux, favorables ou malveillants : ils étaient les divins gardiens du temps.

Malheureusement, nous ne savons pas si les Mayas utilisaient les mathématiques pour d’autres choses que les calendriers ou l’astronomie. On ne sait pas s’ils faisaient des opérations. C’est pour cette raison que nous avons laissé cette civilisation un peu de côté et que nous avons décidé de concentrer nos recherches sur la civilisation chinoise ou égyptienne. D’autre part, nous avons voulu, ultérieurement, inventer un boulier maya en base 20, à la suite d’une proposition d’un chercheur.

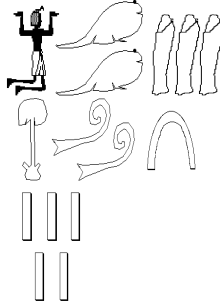
Les Egyptiens.

Le système de numération utilisé par les Egyptiens depuis la fin du 4^{ème} millénaire av. J.C., et qui fut intégré à l’écriture hiéroglyphique, permettait la représentation des nombres entiers pouvant atteindre et même dépasser le million. Cette numération écrite repose sur une base décimale et use essentiellement du principe de l’addition. Il s’agit d’un système qui possède un signe spécial pour indiquer chacune des 7 premières puissances consécutives de dix. Les chiffres changent généralement de sens selon la direction de la lecture des hiéroglyphes (voir page suivante).

	1		
	10		
	100		
	1 000		
	10 000		
	100 000		
	1 000 000		



2324

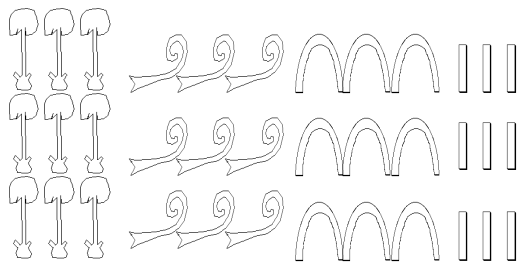


1231215

Les chiffres égyptiens (Hiéroglyphes)

Vers -3 000 av. J.C., les Egyptiens utilisent 7 signes pour écrire les nombres dans un système à base 10. Les chiffres sont représentés par des dessins : un bâtonnet pour 1, un anse pour 10, une spirale pour 100, une fleur de lotus pour 1 000, un doigt pour 10 000, un tétard pour 100 000, un dieu les bras levés au ciel pour 1 000 000.

Ci-dessus, écriture de deux nombres : 2 324 et 1 231 215. Il faut ajouter les valeurs des chiffres pour trouver les nombres.




9 999

Pour écrire un nombre entier donné.


Dessiner les unités du plus grand ordre décimal contenu dans ce nombre, puis celles de l'ordre immédiatement inférieur, jusqu'aux unités. Exemples : 400 000 = 4 x 100 000 soit 4 tétards, 1 422 000 = 1 000 000 + 400 000 + (10 000 x 2 + 1 000 x 2) soit 1 génie + 4 tétards + 2 doigts + 2 lotus.

Les fractions de nombres.


Pour exprimer les fractions de nombres : utilisation du hiéroglyphe de la bouche.



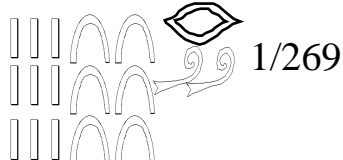
1/3



1/10



1/100



1/269

Les Egyptiens ne connaissaient que les fractions de numérateur 1. Exemples : $3/5 = 1/5 + 1/5 + 1/5$; $3/5 = 1/2 + 1/10$; $47/60 = 1/3 + 1/4 + 1/5$.

La Chine.

Le premier moyen employé par les Chinois pour noter les nombres remonte au 14^{ème} siècle av. J.C. avec les os divinatoires permettant de tirer les oracles. Ceux-ci tenaient plus d'une spéculation mystique et douteuse que d'une affirmation rigoureuse et scientifique comme les mathématiques. Or peu à peu, la pensée chinoise évolua vers une numération, certes simple sinon primaire, mais qui avait l'avantage d'être compréhensible et utilisable par tous (notamment par les marchands, les fonctionnaires, ...). Ainsi, dès le 3^{ème} siècle av. J.C., on trouve la représentation suivante :

1 100 10 000	2 200 20000	3 300 30000	4 400 40000	5 500 50000	6 600 60000
					┌
7 700 70000	8 800 80000	9 900 90000	10 1000	20 2000	30 3000
┐	┑	┒	—	=	≡
40 4000	50 5000	60 6000	70 7000	80 8000	90 9000
≡	≡	└	┘	┙	┚

1992 donne — ┐ ┑ ┒ ||

2107 donne = | ┐

Comme on peut le constater, même si la base est de 10, le zéro n'est signalé que par un espace, ce qui occasionne le problème suivant : dans notre exemple,

210 700 s'écrit = | ┐ mais cette écriture

peut aussi signifier 2 107. Avec l'apparition du zéro écrit tel que nous le connaissons, vers le 8^{ème} siècle, les ennuis des Chinois disparaissent. Avec eux, la formulation d'équations devient possible :

Loi de Rahmouna 1

Pour savoir si un assemblage de chiffres est un nombre ou pas, on regarde si on peut faire des opérations avec et si ces opérations ont un sens.

ex : les numéros de téléphone ne sont pas des nombres, parce que si on ajoute deux numéros de téléphone, le résultat n'est pas un numéro de téléphone.

$3x^3 + 9x^2 + 12x + 7$ donne ||| ┐ ┑ ┒ — || ┘ ┐. On note que l'inconnue n'apparaît qu'une fois dans l'équation (cette inconnue est écrite ┘) ; tous les coefficients qui se trouvent avant cette inconnue sont de degrés supérieurs et ceux qui se trouvent après n'ont pas d'inconnue. Introduisons maintenant le zéro et les nombres négatifs (qui sont “barrés”) dans une équation : $29x^4 - 55x^2 + 19x - 15$ donne = ┐ ○ ≡ ┑ ┒ — ┐ ┘ — ┑ ┒ .

Passons maintenant à un autre concept, celui de la division. Celle-ci se résume au principe suivant : soustraire un maximum de fois possible le diviseur au dividende afin d'obtenir le quotient. Dans l'exemple proposé, nous allons diviser 3 531 par 13 :

	<i>dividende</i>		<i>diviseur</i>	
	<i>reste</i>		—	
			<i>quotient</i>	
				← quotient ()
				← dividende (3531)
				← diviseur (13)

première étape :

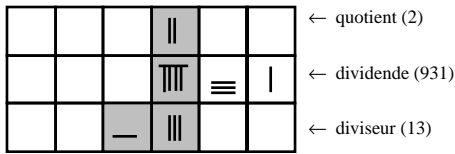
l'opération consiste à soustraire le diviseur au dividende : $35 - 13 = 22$. On ne s'occupe pour l'instant que des deux premiers chiffres du dividende. Une fois l'opération accomplie, on marque 1 à hauteur du quotient puisque la soustraction a été faite une fois seulement.

					← quotient (1)
					← dividende (2231)
					← diviseur (13)

deuxième étape :

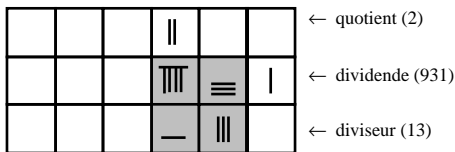
on recommence à soustraire le diviseur au dividende : $22 - 13 = 9$. Comme nous venons à

nouveau d'opérer sur le dividende, on ajoute 1 au quotient.



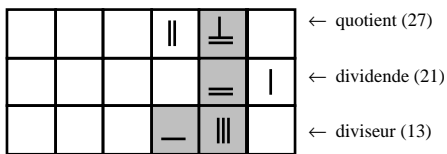
troisième étape :

puisque l'opération consistant à soustraire le diviseur au dividende n'est plus possible ($9 - 13 < 0$), on décale le diviseur d'une colonne vers la droite. Maintenant nous allons soustraire 13 à 93.



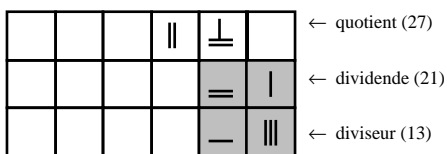
quatrième étape :

on soustrait le diviseur au dividende : $93 - 13 = 80$. On recommence cette opération autant de fois qu'il est possible, en ajoutant 1 au quotient à chaque fois. On finit par obtenir 2 au dividende et 7 au quotient.



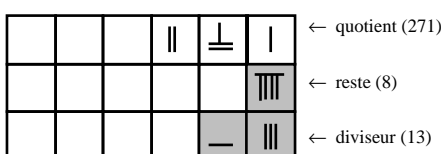
cinquième étape :

de nouveau, la soustraction (dividende moins diviseur) est irréalisable. On décale donc le diviseur d'une colonne et on s'occupe du dividende en entier.



sixième étape :

on soustrait le diviseur au dividende : $21 - 13 = 8$. L'opération est alors terminée, si ce n'est qu'il faut ajouter 1 au quotient puisque nous venons de soustraire le diviseur au dividende.

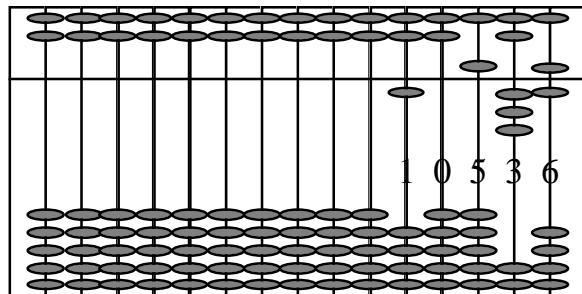


résultat : $3\ 531 = 271 \times 13 + 8$.

note : cette méthode de division n'est pas la seule existante, mais elle a pour avantage d'être facilement applicable sur un boulier.

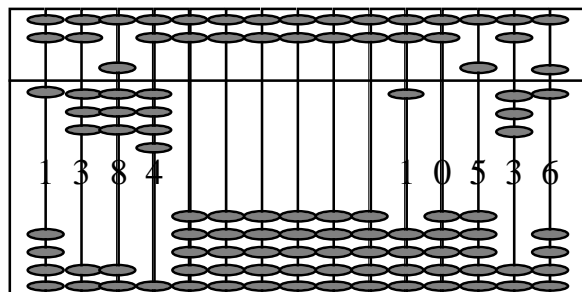
Notre groupe s'est intéressé au boulier chinois. Il fonctionne en base 10 et se présente sous forme d'une série de barres parallèles séparées en deux parties : celle du bas contenant 5 boules comptant chacune pour 1 unité, celle du haut avec 2 boules comptant chacune pour 5 unités. Chaque barre représente une puissance de 10 comme : les unités, les dizaines, les centaines, etc.

Ici le nombre 10 536 est représenté :



l'addition

Si l'on ajoute 1 384 à 10 536, nous le plaçons sur le boulier à l'autre extrémité. Puis nous ajoutons par déplacements de boules, dizaines à dizaines, centaines à centaines, milliers à milliers, etc. Après chaque déplacement un nouveau chiffre du résultat pour enfin nous donner le résultat final qui est 11 920.



[NDLR : pour en savoir plus sur la façon de mener les quatre opérations sur le boulier, s'adresser à la société Tien Shian, 5 rue Richepance, 75008 Paris, qui édite des livres sur l'utilisation des bouliers chinois et japonais, par exemple : “La maîtrise du boulier, études et exercices, niveau débutant”, par Li Ching Tang]

Partant de la position :

$\boxed{2r_1-1 \quad p_1 \quad n_0}$ on fait apparaître à gauche le nombre $v_1 = 20 r_1 + 1$ (on ajoute 1, on multiplie par 10 et on ajoute 1).

$\boxed{20r_1+1=v_1 \quad n'}$ puis on procède de similaire-

ment à ce que nous avons vu lors de la première démonstration :

si c'est possible, on retranche le nombre de gauche au nombre de droite ;

si le résultat obtenu à droite est plus grand d'au moins deux unités que celui de gauche,

on ajoute 2 à gauche ;

et on réitère jusqu'à obtenir un nombre à droite, qu'on notera p , inférieur au nombre de gauche $v_1 + 2(k - 1)$. Le boulier est alors dans la position :

$\boxed{v_1+2(k-1) \quad p}$ où :

$$\begin{aligned} p &= n' - \{ v_1 + (v_1 + 2) + (v_1 + 4) + \dots + (v_1 + 2(k-1)) \} \\ &= n' - \{ v_1 + (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_k - v_{k-1}) \} \\ &= v_k, \text{ avec } v_k = 20 r_1 k + k^2. \end{aligned}$$

Posons $r_0 = k$. Nous obtenons $n' = v_k + p = 20 r_1 r_0 + r_0^2 + p$, avec p minimum. Or nous avons retenu que :

$$\begin{aligned} n &= 100 r_1^2 + 100 p_1 + n_0 = 100 r_1^2 + n' \\ \text{d'où } n &= 100 r_1^2 + 20 r_1 r_0 + r_0^2 + p \\ n &= (10 r_1 + r_0)^2 + p \end{aligned}$$

Les nombres r_0 et r_1 sont donc ceux que nous cherchions.

Il reste à faire apparaître $r = 10 r_1 + r_0$ sur le boulier, en partant de la position :

$\boxed{v_1+2(k-1) \quad p}$

$$\begin{aligned} v_1 + 2(k - 1) &= 20 r_1 + 1 + 2(k - 1) \\ &= 20 r_1 + 2 r_0 - 1 \quad (k = r_0) \end{aligned}$$

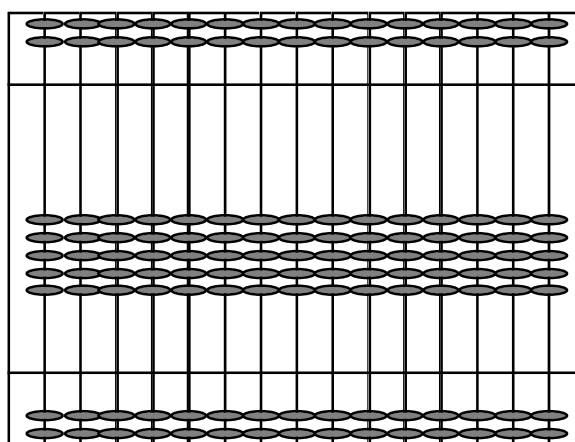
On ajoute donc 1 à gauche, on divise par 2 et la racine apparaît.

$\boxed{r=10r_1+r_0 \quad p(\text{minimum})}$

$$n = r^2 + p$$

Le boulier maya ressemble beaucoup au boulier chinois. En effet, certaines boules représentent 5 unités tandis que d'autres valent 1 unité. La différence majeure qui existe entre ces deux bouliers est que le chinois utilise la base 10 (comme nous) alors que nous calculons en base 20 sur le maya.

C'est pour cette raison que nous avons ajouté des boules de 0,5 unité chacune, permettant de représenter plus facilement les nombres comme dans 50, par exemple : $50 = 2 \times 20^1 + 0,5 \times 20^1$ (en base 20 : $50 = 2 \times 20^1 + A \times 20^0$).



L'addition sur le boulier maya : voir l'exemple de $217 + 32 = 249$ page suivante ; on additionne unités avec unités, puis dizaines avec dizaines, etc, avec :

$$\begin{aligned} 217 &= 7 \times 20^0 + 0,5 \times 20^1 + 10 \times 20^1 \\ 32 &= 2 \times 20^0 + 1 \times 20^1 + 0,5 \times 20^1 \\ 12 \times 20^1 + 9 \times 20^0 &= 249 \end{aligned}$$

Nous remercions Mme Boisseau, Mme Kerharo, Mme Soismier et Mme Vergne pour leurs aides multiples et leur soutien moral.

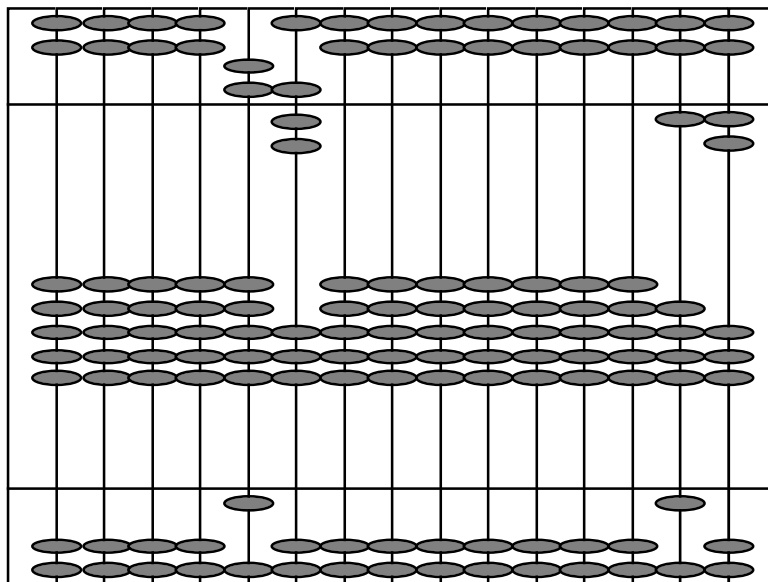
Loi de Bastien 1

Si on prend un nombre qui n'est pas 0 et qu'on le divise par 2 et encore par 2 et encore et encore, on n'arrivera jamais à 0.

C'est parce que quand on divise un nombre par 2, on en enlève la moitié, et donc il en reste toujours une moitié. Comme la moitié de quelque chose n'est jamais 0, on n'arrivera jamais à 0.

*Les élèves de “MATH.en.JEANS”
inventent le boulier maya.*

*[Ils en ont même fabriqué un, avec les restes
de deux bouliers chinois ...]*



5 unités

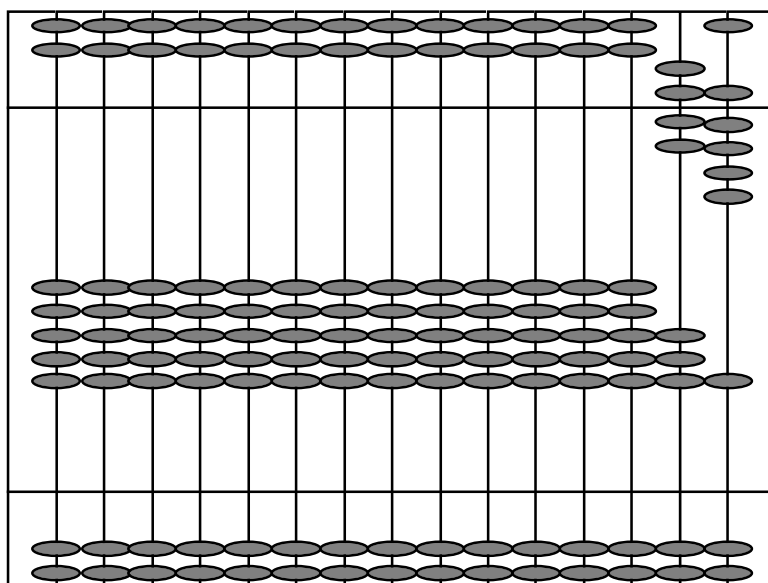
Avant ...

217 & 32

1 unité

0,5 unité

$20^3 20^2 20^1 20^0$



... après

249

... ça marche !