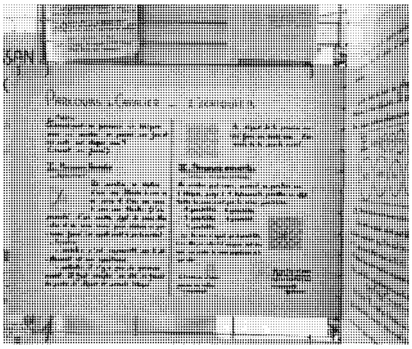
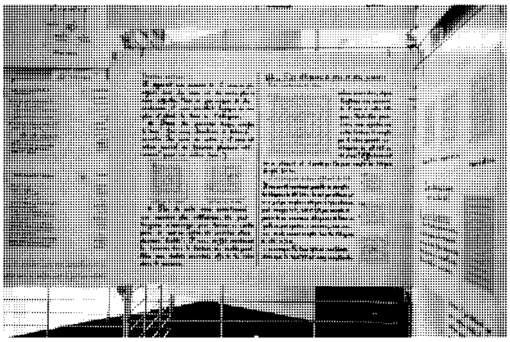
le parcours du cavalier

par Brigitte Razananoro, Adeline Roux et Frédéric Suchet du lycée Jean Jaurès d'Argenteuil (jumelage entre les lycées Jean Jaurès d'Argenteuil et Paul Eluard de Saint Denis)

enseignants : Joseph Cesaro, Alain Huet, René Veillet

chercheur : Daniel Barsky, Directeur de Recherche au CNRS, Université de Villetaneuse



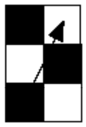


Sujet : Il s'agit de remplir un échiquier par le parcours du cavalier, c'est-à-dire passer une fois et une seule par toutes les cases en allant de l'une à l'autre par le pas du cavalier.

première approche

déplacement et duolet :

Le déplacement du cavalier joint deux sommets d'un rectangle de 3 cases sur 2 par ses diagonales.



Nous appelons duolet le segment ou pas du cavalier qui relie ainsi deux cases.

Le cavalier passe donc d'une case noire à une case blanche et d'une case blanche à une case noire. Pour cette raison, il nous faut autant de cases blanches que de cases noires pour réaliser un parcours fermé [NDLR : on finit sur la case initiale].

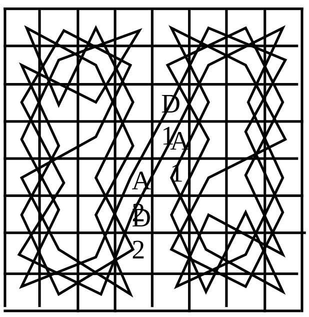
Remplir par symétrie :

Peut-on remplir une moitié d'échiquier puis l'autre par symétrie :

● axiale ?

non : le déplacement du cavalier n'étant pas symétrique, nous obtiendrions deux parcours dissociés.

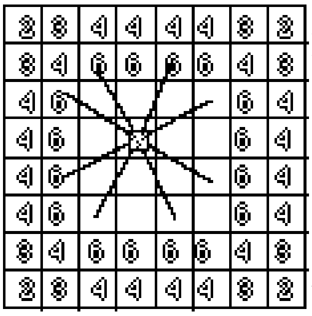
● centrale ?



oui : dans ce cas, il faut sélectionner le départ et l'arrivée de la première moitié tels que le symétrique de l'arrivée forme un duolet avec le départ initial : ceci implique que le symétrique du départ se joigne à l'arrivée initiale avec le pas du cavalier, d'où l'impossibilité d'obtenir des parcours ouverts avec cette méthode.

manières de remplir

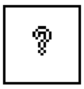
le tableau des cases pondérées :

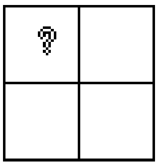


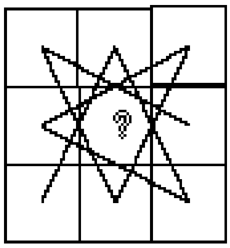
… les cases du centre ayant 8 possibilités

À partir d'une case, le cavalier peut aller en haut, en bas, à droite, à gauche pour son déplacement sur 3 puis de même sur 2, soit le cavalier peut former 8 duolets différents à partir d'une seule case. Mais toutes les cases n'ont pas 8 possibilités.

Il était évident qu'on ne pouvait pas remplir les échiquiers de 1, 2, 3 cases de côtés,



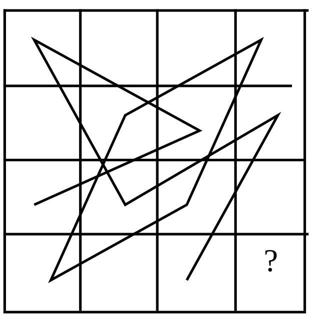




1, **2** aucun déplacement possible

3 : on ne peut pas atteindre le centre

mais à 4, c'est encore impossible : les coins n'ont que 2 possibilités de former des duolets (1 pour y arriver, 1 pour en repartir) c'est pourquoi, quand on est passé par un coin, soit on a bloqué les accès du coin opposé, soit on réalise un parcours fermé sur 4 cases au lieu des 16.



méthodes

Il apparaît donc sur le tableau des cases pondérées une couronne périphérique de 2 cases d'épaisseur dont les cases ont des accès plus ou moins nombreux : on peut donc très vite les bloquer !

Pour ne pas risquer de condamner ces cases périphériques, il nous semblait logique de remplir d'abord cette couronne.

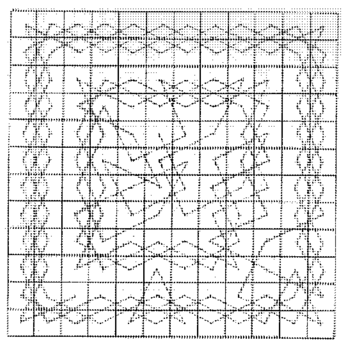
Dans les premiers temps, une fois la couronne remplie, nous cherchions “à tâtons” à remplir les cases du centre — il nous est même arrivé de trouver plusieurs “intérieurs” pour un même “tour”—.

Par la suite, nous avons trouvé une manière plus systématique : il suffit de s'arranger pour laisser un nombre pair de cases du centre afin de pouvoir constituer des duolets ; on les insère ensuite dans le parcours en le reliant à un autre duolet parallèle dans la couronne avec qui il forme un losange.

des échiquiers plus grands

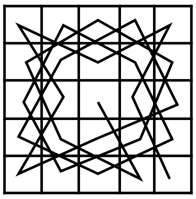
des couronnes en plus :

Nous avons donc depuis longtemps une couronne de 2 cases en périphérie de notre échiquier. Peut-être pourrions-nous ajouter une autre couronne et remplir par le même procédé un échiquier de 12 sur 12 ?

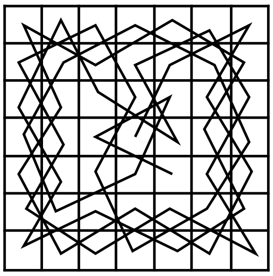


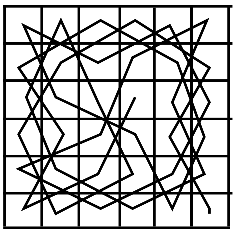
Effectivement, on a réussi, il semble que l'on puisse remplir les échiquiers de côtés 8 + 4.n (n étant un entier positif ou nul évidemment !).

Des échiquiers différents de 8 sur 8 :

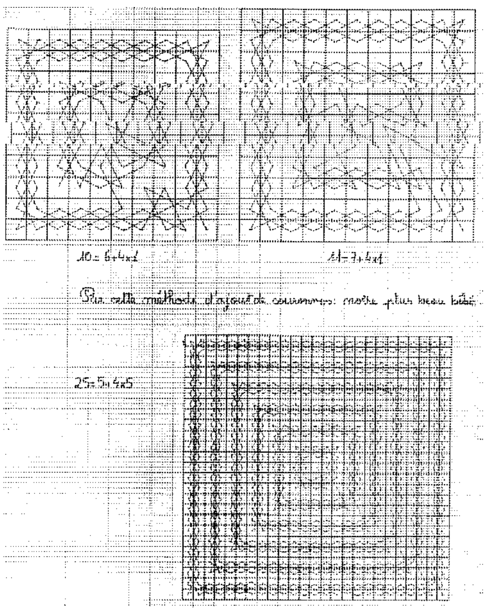


Nous savons donc remplir les échiquiers de côté 8 + 4.n. On sait, par ailleurs, que l'on ne sait pas remplir un échiquier de 4 sur 4 mais pourquoi ne pas essayer 5 sur 5, 6 sur 6, 7 sur 7 … ?





A partir de ces nouveaux échiquiers de base auxquels on vérifie que l'on peut ajouter n couronnes (de 2 cases), nous sommes sensés savoir remplir les échiquiers de côté e > 4 : 5 + 4.n, 6 + 4.n, 7 + 4.n, 8 + 4.n.



Remarque : les échiquiers de base 5 sont très faciles et presque immédiats alors que ceux de base 7 sont plus compliqués à construire.

multiplier la surface remplie

À partir de deux surfaces remplies, que l'on juxtapose, on peut n'en former qu'une de surface double en cherchant, dans les côtés parallèles, 2 duolets parallèles formant un losange et en les reliant on insère ainsi un parcours dans l'autre.

Mais attention, si l'on ne peut relier un départ et une arrivée, on se retrouve avec 2 parcours simultanés au lieu d'un ! ; il faut donc insérer un parcours fermé dans un parcours ouvert.

Par extension, si l'on ne peut relier les départs et arrivées pour assembler n parcours en un, il en faut au moins (n - 1) qui soient de parcours fermés.

conclusion

Au terme de cette année, nous savons donc remplir tous les échiquiers carrés de côté n > 4 et nous pouvons même en former des rectangulaires. Mais sans doute y a-t-il d'autres méthodes encore plus infaillibles que la nôtre pour remplir un échiquier de taille n sur k par exemple …