

piéger des pions

par M. Robert Ngauv, M. Monirath Ngor,
M. Alexandre Ta, élèves de 3^o du **collège
Victor Hugo de Noisy le Grand (93)**, éta-
blissement jumelé avec le **collège Anne
Frank de Bussy St Georges (77)**

enseignant :
M. Pierre Lévy

chercheur :
M. Olivier Bodini

coordination article : Ta Alexandre

compte-rendu de parrainage :

Les élèves du collège Victor Hugo ont présenté un sujet clair et attrayant. Il faudrait néanmoins qu'ils s'expriment plus intelligiblement. Il semble aussi qu'il soit possible qu'ils rattachent leurs recherches graphiques à des résultats algébriques. Le bilan est plutôt positif.

CG — “Pions” : formes à voisinage minimum. 1

Dans un quadrillage, chaque croisement a 4 croisements immédiatement voisins. Comment occuper par des pions un nombre fixé de croisements de sorte que leur influence soit minimum ? Autrement dit, comment faire pour limiter le plus possible le nombre de croisements libres qui soient voisins d'un des pions ? Les formes observées dans de nombreux phénomènes naturels (bulle de savon ...) ou données à des objets créés par l'homme (berlingot de lait ...) peuvent s'expliquer au moyen de ce principe de voisinage minimum.

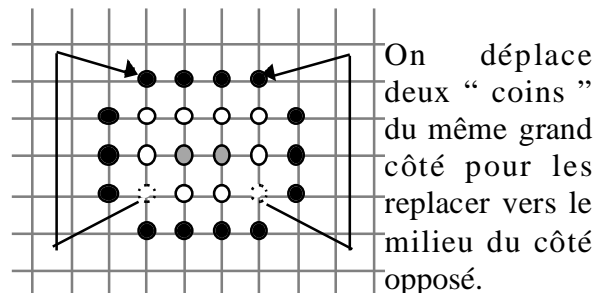
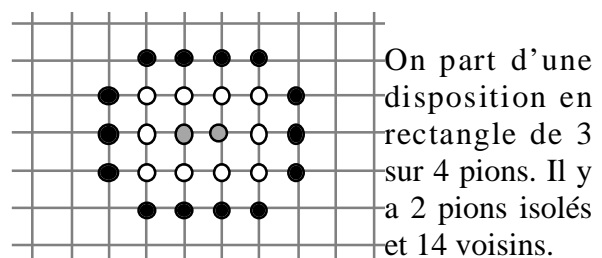
Dans un quadrillage, un pion (**blanc**) placé sur un nœud a quatre voisins (**noirs**). Deux pions peuvent donc avoir huit voisins s'ils ne sont pas côte à côte ou six voisins. Comment placer un nombre donné de pions afin que le nombre de voisins soit le plus petit possible ?

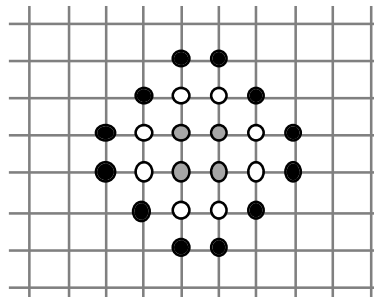
Les pions seront toujours représentés en blanc et les voisins en noir. Nous appellerons **pion isolé** un pion qui n'a pas de voisin c'est-à-dire dont tous les voisins sont des pions blancs. Ils seront représentés en **gris**. Notre stratégie consiste à « isoler » le maximum de pions afin de minimiser le nombre de voisins. Nous avons cherché la meilleure disposition pour 1 pion, 2 pions, 3 pions, etc ... Notre idée était d'utiliser la disposition trouvée pour n pions afin d'en déduire la disposition pour $(n + 1)$ pions. Après beaucoup de manipulations, nous avons mis au point une première stratégie.

La configuration rectangle.

Elle consiste à partir d'une configuration « rectangle » (la plus proche possible d'un carré) de déplacer les pions qui forment les coins et de les replacer vers le milieu du rectangle de façon à rendre la configuration plus « compacte ». En fait, nous essayons de nous rapprocher de plus en plus de la configuration en « croix ».

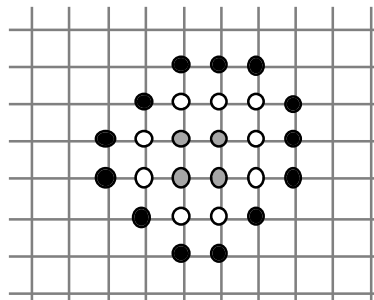
Par exemple avec 12 pions :





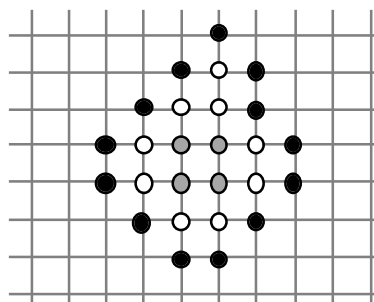
On obtient ainsi une croix avec 4 pions isolés. Le nombre de voisins devient 12.

Avec 13 pions :



On utilise la configuration trouvée pour 12 et on place le pion supplémentaire dans un « coin » afin de ne rajouter qu'un voisin (on en supprime 1 et on en ajoute 2).

(on en supprime 1 et on en ajoute 2).



En le plaçant comme dans la configuration d'à côté, on obtient le même nombre de voisins.

Cependant, on s'éloigne de notre configuration rectangle.

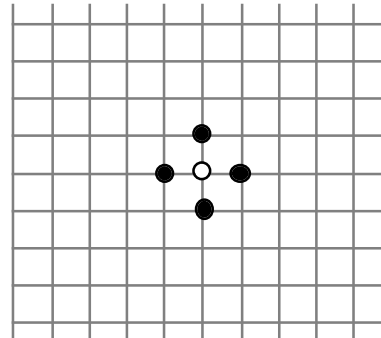
D'une manière plus générale, on part toujours du rectangle le plus grand et le plus compact possible (le plus proche d'un carré). On tente alors de former une croix et s'il reste des pions, on les place dans les coins.

Cependant, en étudiant les configurations obtenues, on a remarqué qu'il existait plusieurs configurations différentes équivalentes en nombre de voisins (nous en avons donné un exemple pour 13). Nous avons même réussi à améliorer certaines solutions.

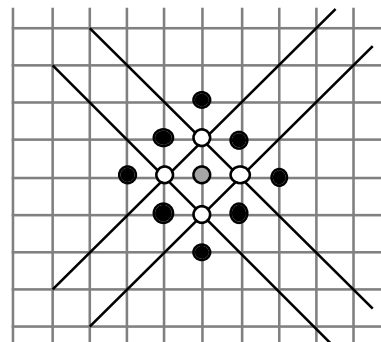
Nous avons alors mis au point une seconde stratégie.

La configuration en diagonale.

Voici la stratégie permettant de disposer un nombre donné de pions sur un quadrillage dans une configuration en diagonale.

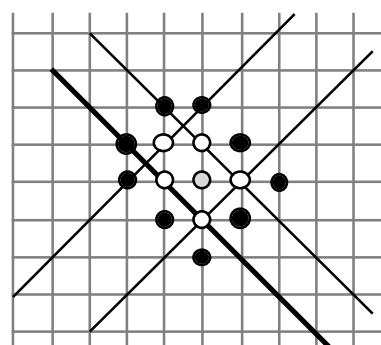


• Etape 1 : on place un pion sur un nœud.



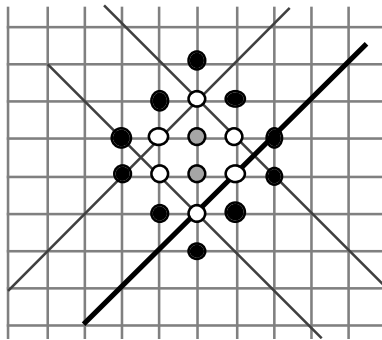
• Etape 2 : on place quatre autres pions autour du premier pour l'isoler. C'est la configuration en « croix ».

remarque : les diagonales les plus à l'extérieur forment un carré, une figure « compacte » ; donc cette configuration est « une » des solutions pour minimiser le nombre de voisins.

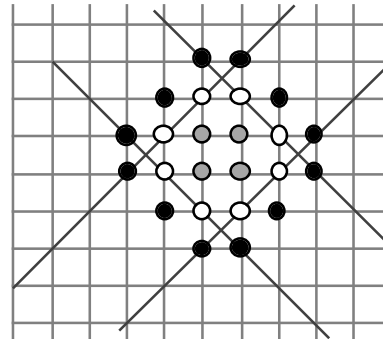


• Etape 3 : on complète le nombre de pions sur les diagonales selon l'un des axes.

Il y a donc deux pions par diagonale selon cet axe (en gras). Les diagonales les plus à l'extérieur forment un rectangle.



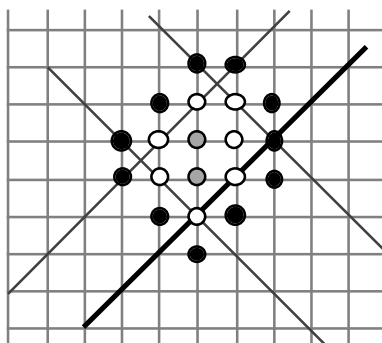
• Etape 4 : on complète le nombre de pions par diagonale selon l'autre axe (en gras).



• On complète alors les autres diagonales intérieures.

Il y a alors le même nombre de pions sur chaque diagonale. Les diagonales les plus à l'extérieur forment à nouveau un carré.

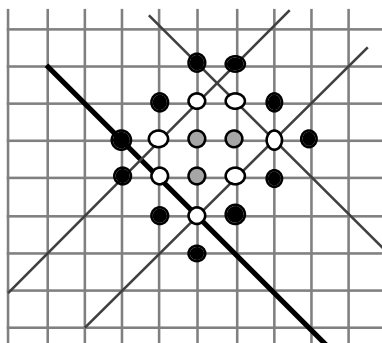
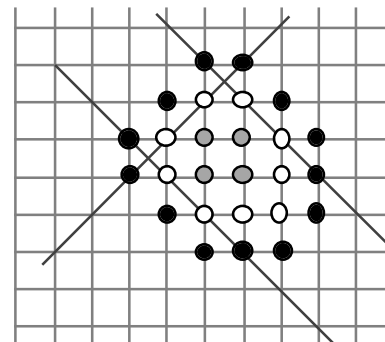
Les diagonales les plus à l'extérieur forment à nouveau un carré. Pour 12 pions, on retombe sur exactement la même configuration que la configuration rectangle.



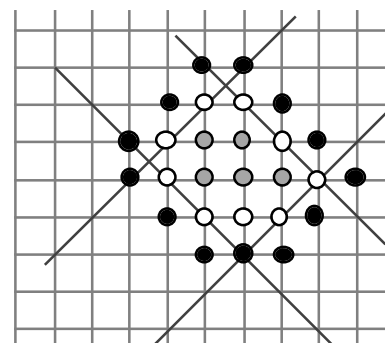
• Etape 5 : on rajoute un pion sur l'une des diagonales suivantes entre les diagonales les plus à l'extérieur.

On peut poursuivre ce processus aussi longtemps que l'on veut.

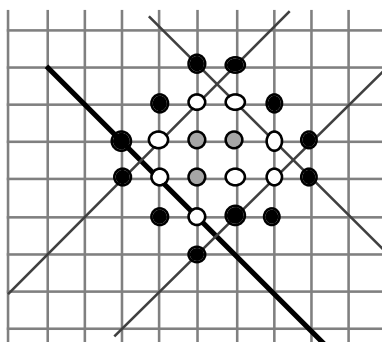
Les diagonales les plus à l'extérieur forment un rectangle.



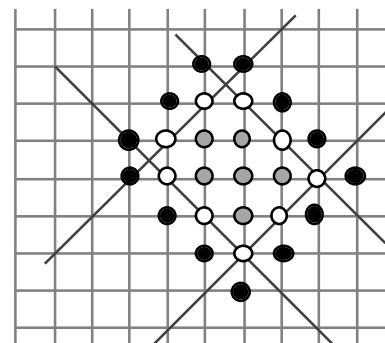
• Etape 6 : on complète le nombre de pions sur les diagonales selon l'autre axe (en gras).

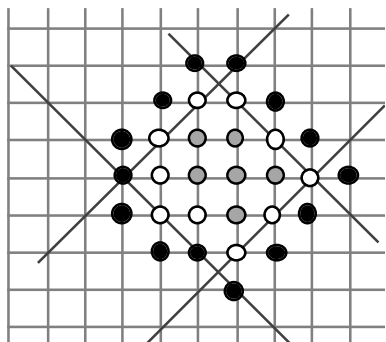


Il y a le même nombre de pions par diagonale selon cet axe.



• Etape 7 : on complète le nombre de pions sur l'une des diagonales « intérieures » selon cet axe (en gras).





et ainsi de suite ...

Nous pensons que la configuration en diagonale est la meilleure possible pour minimiser le nombre de voisins mais nous n'en avons pour le moment aucune preuve définitive.

Dans la configuration en diagonale, il y a souvent plus de pions isolés et plus de voisins servant à deux pions. Dans une telle configuration, la plupart du temps, tous les pions blancs ont pour voisin au moins un pion gris ce qui n'est pas le cas dans une configuration rectangle (ceci n'est pas toujours vrai, par exemple pour 6,7,9, ...). Nous pensons qu'une étude plus poussée de cette remarque nous mènerait à la solution.

Pourtant, en utilisant cette méthode, nous avons réussi à améliorer nos dispositions dans beaucoup de cas. Voici quelques exemples permettant de comparer les deux méthodes.

.....

configuration rectangle

.....

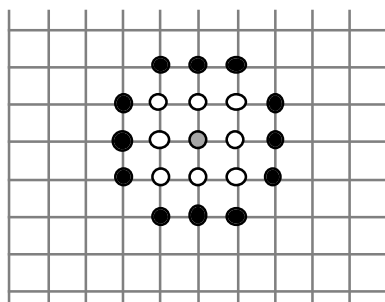
avec 9 pions

.....

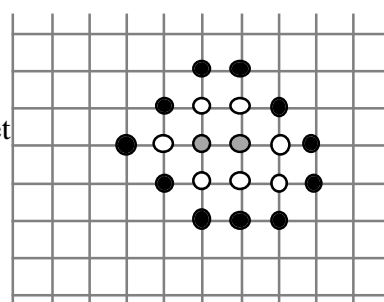
avec 9 pions

.....

configuration diagonale



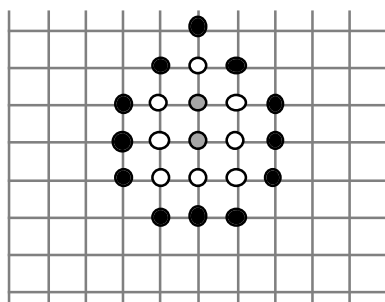
1 pion isolé et
12 voisins



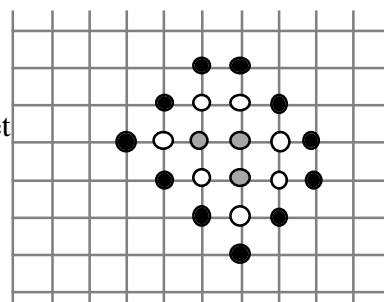
2 pions isolés et
11 voisins

avec 10 pions

avec 10 pions



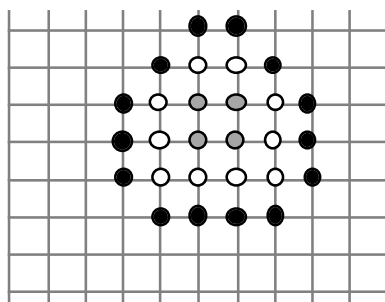
2 pions isolés et
12 voisins



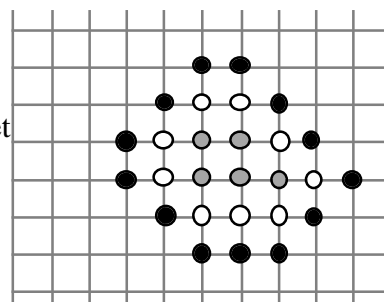
3 pions isolés et
11 voisins

avec 14 pions

avec 14 pions



4 pions isolés et
14 voisins



5 pions isolés et
13 voisins