Polyèdres et Origami

Année 2016 – 2017

Elèves de troisième :Arrouzet Jane, De Almeia Pauline, Fericelli Yan, Gricourt Romane, Lapadu Cloé, Lassalle Anne, Marsan Juliette, Mousquez Lucas, Moutet-Fortis Clément, Poublan Thomas, Storck Jordane

Encadrés par Billard Marie, Heguy Christine, Goyhetche Alain

Établissements : Collège Gaston Fébus, Orthez et Collège Reine de Sancié Sauveterre de Béarn

Chercheur : Jacky Cresson, Laboratoire de Mathématiques Appliquées de Pau

1. Présentation du sujet

Nous nous sommes intéressés cette année à la construction de solides.
Dans un premier temps, nous avons étudié les solides de Platon. Peut-on déterminer une méthode pour les dénombrer, les classer ? Quels polygones réguliers peut-on utiliser ?
Nous avons ensuite essayé de construire des solides à l'aide de l'origami modulaire (assemblage de polygones réguliers). Existe-t-il des contraintes de construction ?

2. Annonce des conjectures et résultats obtenus

Les solides de Platon sont constitués de polygones réguliers tous identiques. Nous avons utilisé une méthode qui permet de les déterminer. Nous en avons donc découverts cinq. Seuls certains polygones réguliers peuvent former un solide de Platon. Nous allons démontrer que le nombre de côtés est compris entre 3 et 5. Nous les avons ensuite classés.

Nous avons voulu ensuite construire des solides en utilisant l'origami modulaire. Les contraintes de tension ne nous permettent pas de construire des polygones de moins de 5 côtés. Nous ne pouvons donc pas réaliser certains solides de Platon. Nous avons élargi notre recherche à d'autres solides ayant différents polygones (pentagones, hexagones).

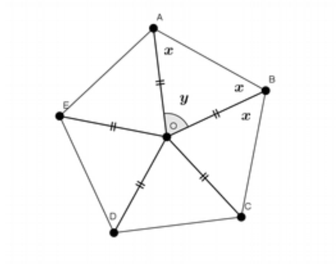
Après plusieurs échecs lors des pliages, nous avons voulu savoir s'il existait une condition pour que les solides soient constructibles. La formule d'Euler (relation liant le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un solide) nous permettra de déterminer les contraintes de construction en origami (il devrait y avoir 12 pentagones dans chaque solide). Nous verrons aussi que, lors de l'assemblage des différents solides, le positionnement des pentagones influera sur la forme obtenue.

Enfin, nous avons essayé de construire un « solide avec un trou » : un tore. En utilisant une nouvelle fois la formule d'Euler, nous avons trouvé une nouvelle condition liant le nombre de pentagones et d'heptagones.

3. Texte de l'article

A : Calcul des angles d'un polygone régulier

i. *cas particulier d'un pentagone régulier*



Tout d'abord, pour calculer l'angle du pentagone régulier, il faudra calculer l'angle nommé ici *y*.

Le polygone est un pentagone donc $y=\frac{360}{5}=72\,°$

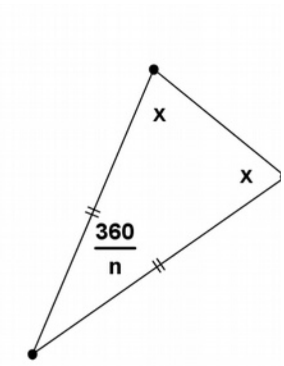
Le triangle AOB est isocèle en O. Il faut calculer dans ce triangle $2x$ (qui correspondra à l'angle du pentagone).

On sait que la somme des angles d'un triangle est 180° donc $72+2x=180$; $2x=180-72=108\,°$

Les angles du pentagone régulier sont donc égaux à 108°.

ii. *dans le cas général*

Dans un polygone régulier à *n* côtés :



L'angle au centre a pour mesure $\frac{360}{n}$.

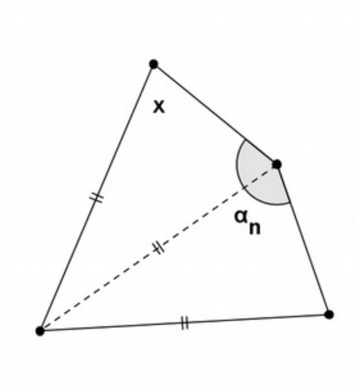
Le triangle est un triangle isocèle.

x est la mesure de l'angle à la base d'un triangle isocèle.

$$\frac{360}{n}+2x=180$$

$$\frac{360}{n}-\frac{360}{n}+x=180-\frac{360}{n}$$

$$2x=180-\frac{360}{n}$$



α_n correspond à l'angle du polygone régulier. Il est aussi égal à $2x$.

$$\alpha_n=180-\frac{360}{n}$$

B: Comment déterminer les solides de Platon

i : ***les polygones utilisés***

Tous les polygones qui constituent les solides de Platon sont réguliers. On ne peut utiliser qu'une sorte de polygone pour un solide.

ii : ***la méthode d'assemblage***

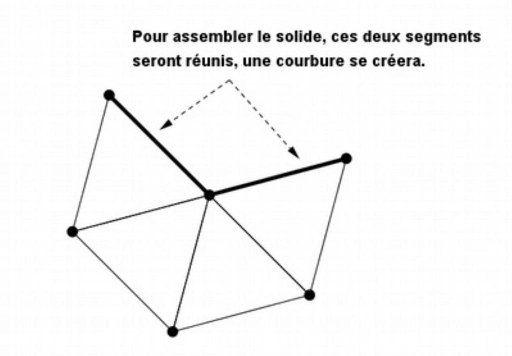
Le principe : De chaque sommet du solide, doit partir le même nombre de polygones.

Pour chaque sommet du solide, il y a obligatoirement au moins trois polygones.

L'angle formé par tous les polygones doit être inférieur à 360° pour que le solide « ferme » lorsqu'on le pliera..

Cette courbure est appelée la courbure gaussienne. (1)

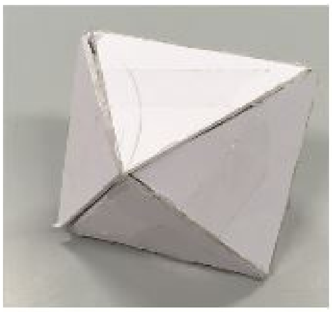
Pour construire les solides, on pourra utiliser des triangles équilatéraux, des carrés, des pentagones réguliers mais pas d'hexagone car l'angle serait égal à 360°.

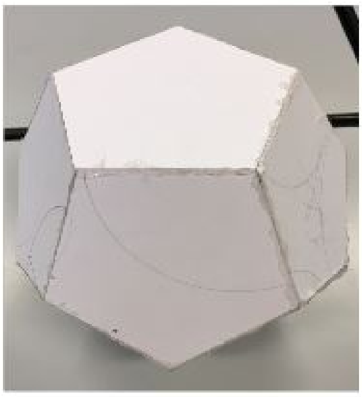


iii : la classification

Figures de base		Nombre de polygones partant du sommet (nom du solide correspondant)			
Nom	Angle $\alpha_n = 180 - \frac{360}{n}$	3	4	5	6
Triangle (3 côtés)	60°	180° (tétraèdre)	240° (octaèdre)	300° (icosaèdre)	360° donc impossible
Carré (4 côtés)	90°	270° (hexaèdre)	360° donc impossible		
Pentagone (5 côtés)	108°	324° (dodécaèdre)	432° donc impossible		
Hexagone (6 côtés)	120°	360° donc impossible			

Nous obtenons donc les cinq solides de Platon :

Tétraèdre	Octaèdre	Icosaèdre
		

Hexaèdre	Dodécaèdre
	

Comme on peut le voir grâce au tableau, on ne pourra pas utiliser des polygones avec 6 côtés ou plus car alors, l'angle formé par tous les polygones sera supérieur ou égal à 360°. Il n'y aura donc pas de courbure et le solide ne fermera pas.

C : La formule d'Euler

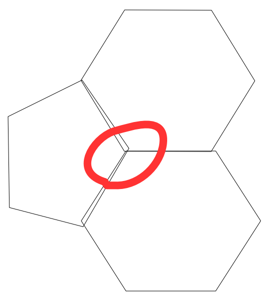
i : définition et premier exemple : le tétraèdre

La formule d'Euler fait le lien entre le nombre de faces, d'arêtes et de sommets.
Voici la formule : Faces + Sommets – Arêtes = 2
Exemple avec le tétraèdre :

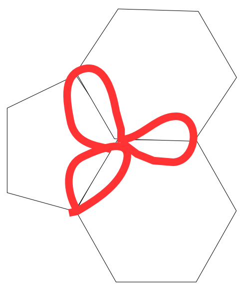
Faces	*Sommets*	*Arêtes*	*Formule*
4	*4*	*6*	*4 + 4 - 6 = 2*

ii : application : utilisation de la Formule d'Euler pour déterminer le nombre de pentagones nécessaires à la construction d'un solide

Dans la suite, nous construirons des solides (donc le dodécaèdre) grâce à l'origami modulaire. (2)
Nous devons donc savoir s'il existe des contraintes sur le nombre de pentagones et d'hexagones.
Notons x = nombre de pentagones et y = nombre d'hexagones.
Remarques :



1 sommet pour 3 faces donc on divise par 3



1 arête pour 2 faces donc on divise par 2

	Faces	*Sommets*	*Arêtes*
Pentagone	*x*	$\frac{5x}{3}$	$\frac{5x}{2}$
Hexagone	*y*	$\frac{6y}{3}$	$\frac{6y}{2}$

$$x+y+\frac{5x+6y}{3}-\frac{5x+6y}{2}=2$$

$$\frac{6x}{6}+\frac{6y}{6}+\frac{10x}{6}+\frac{12y}{6}-\frac{15x}{6}-\frac{18y}{6}=2$$

On effectue donc le calcul suivant :

On regroupe les x : $\frac{6x}{6}+\frac{10x}{6}-\frac{15x}{6}=\frac{x}{6}$

On regroupe les y : $\frac{6y}{6}+\frac{12y}{6}-\frac{18y}{6}=0\times y$

Donc : $\frac{1}{6}x=2$; $x=12.$

On retrouve un résultat connu : le nombre de pentagones doit toujours être égal à 12 (dodécaèdre). Par contre, il n'y a aucune condition sur le nombre d'hexagones.

iii : avec un trou

Nous essayons maintenant la formule avec un solide avec un trou. Voici la formule d'Euler dans ce cas :

Faces + Sommets – Arêtes = 0 (3)

x = nombre de pentagones ; y = nombre d'hexagones ; z = nombre d'octogones

$$x+y+z+\frac{5x+6y+8z}{3}-\frac{5x+6y+8z}{2}=0$$

$$x+y+z+\frac{5}{3}x+2y+\frac{8}{3}z-\frac{5}{2}x-3y-4z=0$$

$$x+\frac{5}{3}x-\frac{5}{2}y+y+2y-3y+z+\frac{8}{3}z-4z=0$$

$$\frac{6x+10x-15x}{6}+0\times y+\frac{3z+8z-12z}{3}=0$$

$$\frac{x}{6}-\frac{z}{3}=0 \;;\; \frac{x-2z}{6}=0 \quad \text{donc} \quad x-2z=0 \;;\; x=2z.$$

Le nombre de pentagones devra donc être le double du nombre d'octogones.

D : Les Buckyballs

i : la principale contrainte

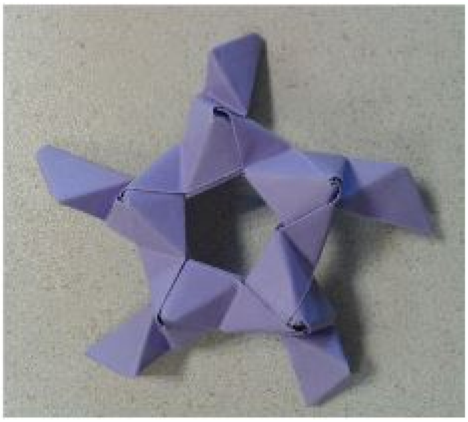
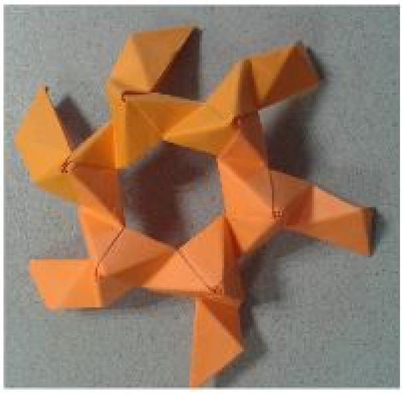
Nous reprenons la contrainte démontrée auparavant :

Dans chaque figure que nous avons réalisé, il y a obligatoirement 12 pentagones contrairement aux hexagones où l'on met le nombre d'hexagones en fonction de la figure.

ii : l'origami modulaire :

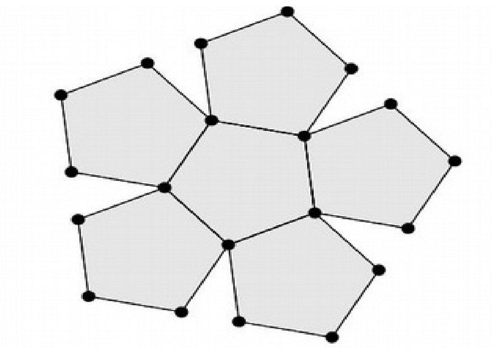
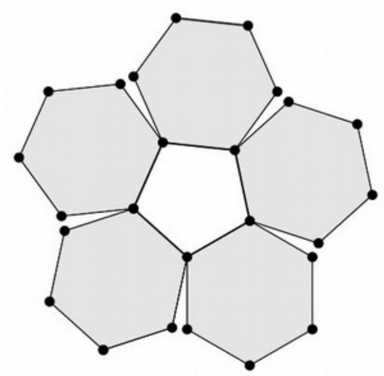
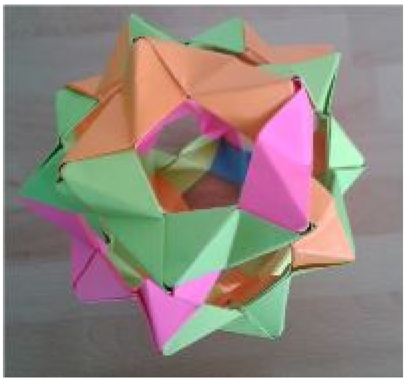
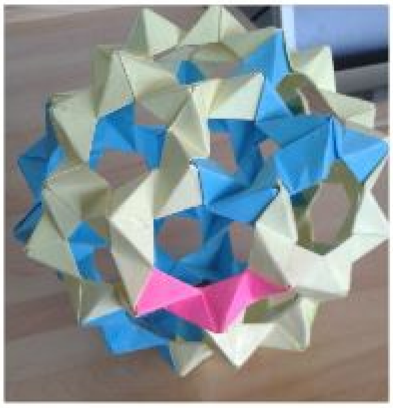
Il faut savoir que le nom « Buckyball » a été donné en hommage à un architecte américain du nom de Buckminster Fuller qui inventa le dôme géodésique.

1/ Pour construire ces solides, l'objet de base est le PHIZZ inventé par le professeur Tom Hull (Hampshire College , Massachussets, Etats-Unis). Nous avons utilisé des petites feuilles de papier autoadhésive (type post-it). 	2/ En assemblant ces PHIZZ, on obtient des « tri-PHIZZ » 

3/ On peut ensuite construire un pentagone	4/ un hexagone
	

Nous ne pouvons pas assembler, avec cette technique, des polygones réguliers de 3 ou 4 côtés car les tensions seraient trop fortes et la construction se déferait.

iii : ***les différents solides construits***

Le mini buckyball est composé seulement de pentagones. Il y en a 12. Sur cette figure, si on joint tous les pentagones entre eux en refermant la figure, cela courbe, c'est ce qu'on appelle la courbure gaussienne.	Le maxi buckyball est composé de 12 pentagones et autour de chaque pentagone il y a 5 hexagones. On peut voir que l'écart entre les hexagones est petit ce qui fait donc que la courbure sera moins importante.
	
	

Notes d'édition

(1) Les auteurs n'expliquent pas vraiment ce qu'ils entendent par « courbure gaussienne » mais c'est un concept compliqué à définir proprement. Cependant, l'intuition naturelle que le lecteur pourrait avoir est suffisante pour comprendre quand les auteurs utilisent le terme « courbure » dans la suite.

(2) Les auteurs expliquent l'origami modulaire en pages 5 et 6. En particulier, ils expliquent qu'il n'est pas possible de construire des polygones réguliers avec 3 ou 4 cotés. C'est pour cela qu'ils ne s'intéressent qu'aux pentagones et aux hexagones.

(3) On peut se demander ce que devient la formule quand on a un solide avec deux « trous », ou trois « trous », etc…