Probabilités et pièces d'or

Année 2013 - 2014

Elèves de 3ème : BERNAS Jason, LACROIX Noëmie, PERRON Yohann, PEROUMAL Thomas.
Etablissement : Collège Alain Fournier d'Orsay.
Enseignants : ASSELAIN Claudie, FERRY Florence, SEGARRA Nicolas.
Chercheur : ABRAHAM Céline.

Le sujet :

Un roi cruel veut marier sa fille, la ravissante princesse Alix, à un chevalier chanceux.
Il propose à tout prétendant le « jeu » suivant :
Dans un sac, le roi a mis 50 pièces d'argent et une d'or. Les pièces sont indiscernables au toucher. Le chevalier qui souhaite épouser la princesse devra :

a) tirer une pièce, noter sa matière (or ou argent) et la mettre de côté.
b) tirer une seconde pièce :
- **si elle est de la même matière que la précédente, la mettre de côté et recommencer en b)**
- **si elle est d'une autre matière, la remettre dans le sac et recommencer en a).**

Si la dernière pièce tirée est en or, le prétendant épousera la princesse.
Si la dernière pièce tirée est en argent, le prétendant aura la tête coupée.

Problématique : Quelle est la probabilité de mourir ?

SOMMAIRE :

1 - Annonce des conjectures et résultats obtenus

Avant de commencer à jouer, nous pensions que le chevalier venant tenter sa chance, avait une probabilité beaucoup plus grande de mourir que d'épouser la princesse, puisqu'il y a 50 pièces d'argent et une seule pièce d'or. Nous avons commencé à jouer avec quelques pièces : après plusieurs parties, les gains étaient pratiquement aussi nombreux que les pertes. Nous avons été très surpris de ce résultat. Nous avons finalement réussi à prouver que, dans le cadre du jeu, les probabilités de mourir et de vivre étaient les mêmes.
Lorsque nous avons fait varier le nombre de pièces argent ou or, nous avons conjecturé que la probabilité de perdre ou de gagner était de ½.

2 - Arbres de probabilités

Nous avons donc essayé de mathématiser la situation en représentant toutes les possibilités de gagner ou de perdre au jeu sous forme d'arbres de probabilités.

La pièce d'or sera représentée par un disque gris clair et une pièce d'argent, par un disque gris foncé.

Si on tire une pièce d'argent, elle devient la référence et on dira que l'on est en base argent. Si au cours du jeu on tire une pièce de couleur différente de la précédente, on la remet et on dira que l'on est en base neutre (comme au début du jeu).

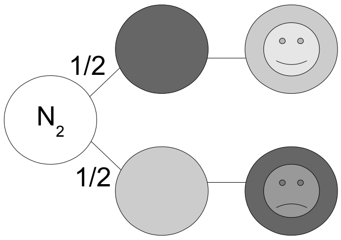
Si n est le nombre total de pièces au départ, on notera :
- Base neutre : N_n : aucune pièce de référence
- Base argent : A_n : pièce de référence en argent

Nous n'utilisons pas de base or car, pour arriver en base or il faut piocher la pièce d'or avant la fin, et à ce moment là le jeu est perdant car il ne reste plus que des pièces d'argent.

On notera P_G, la probabilité de gagner et P_p celle de perdre.

Commençons par étudier des arbres de probabilités avec un nombre restreint de pièces.

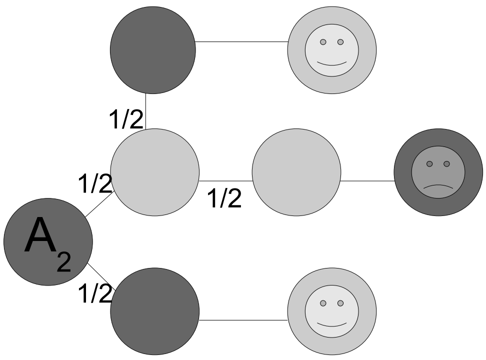
A) 1 pièce d'or et 1 pièce d'argent (n = 2)



La probabilité de gagner est identique à celle de perdre : $P_G = P_p = \frac{1}{2}$

Remarque : les branches sans probabilité écrite, sont des branches de probabilité 1, ne changeant pas le résultat final.

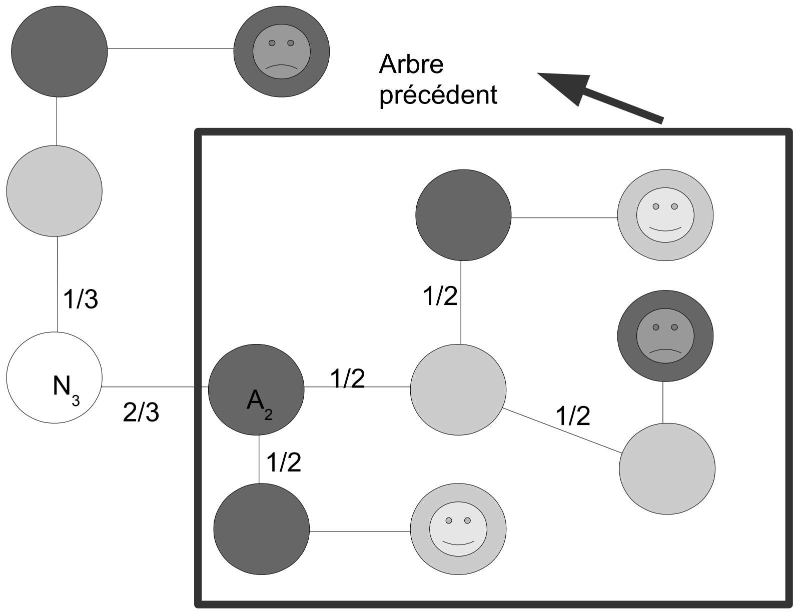
Si nous avions tiré une pièce en argent au tour précédent, nous serions partis d'une base argent. Regardons ce que devient notre arbre avec 1 pièce d'or et 1 pièce d'argent restantes :



Dans ce cas, la probabilité de gagner n'est pas la même que celle de perdre :

$$P_G=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_p=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

B) 1 pièce d'or et 2 pièces d'argent (n = 3)

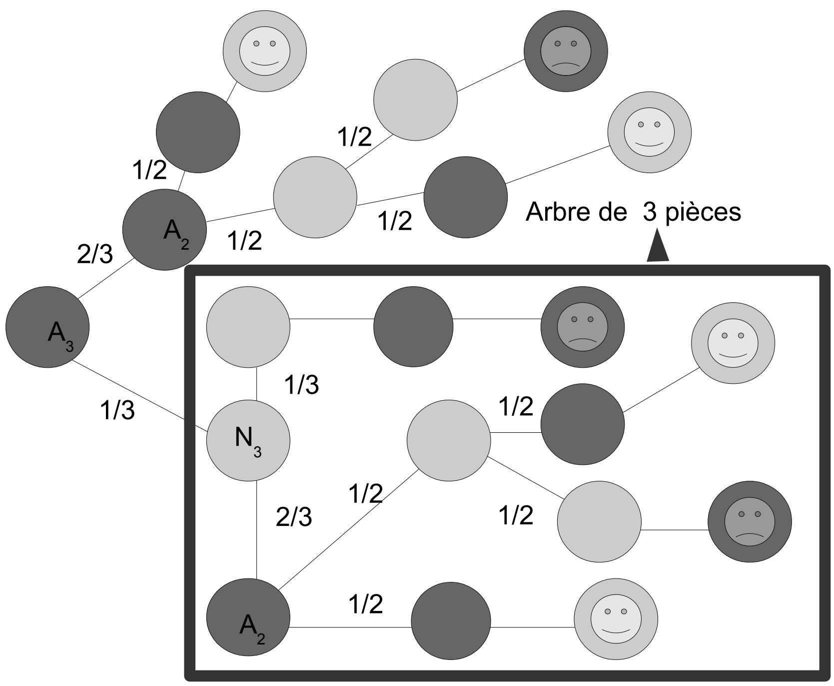


$$P_p=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_G=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad \text{on a donc bien encore :} \quad P_G=P_p=\frac{1}{2}$$

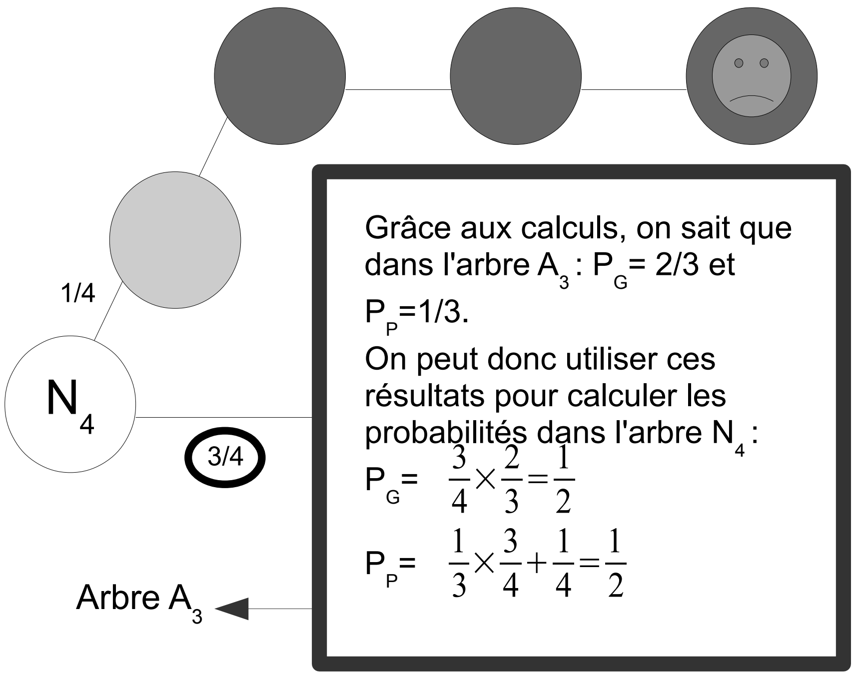
Remarque : l'arbre de n=2 se retrouve dans cet arbre de n=3.

C) 1 pièce d'or et 3 pièces d'argent (n = 4)

Si nous avions tiré une pièce en argent au tour précédent, nous serions partis d'une base argent. Regardons ce que devient notre arbre avec 1 pièce d'or et 2 pièces d'argent restantes :



Premier chemin en partant du bas : Vie	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$
Deuxième chemin en partant du bas : Mort	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
Troisième chemin en partant du bas : Vie	$\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{18}$
Quatrième chemin en partant du bas : Mort	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$
Cinquième chemin en partant du bas : Vie	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
Sixième chemin en partant du bas : Mort	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$
Septième chemin en partant du bas : Vie	$\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$
Probabilité totale de mort :	$\frac{1}{18}+\frac{1}{9}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$
Probabilité totale de vie :	$\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$



Donc $P_G=P_p=\frac{1}{2}$ pour n = 4.

3 – Démonstration et réponse au problème

Notations :

- La probabilité (de mourir) avec n pièces en commençant en base neutre : p_n

- La probabilité (de mourir) avec n pièces en commençant en base argent est a_n

- La probabilité (de mourir) avec n pièces en commençant en base or est o_n

Par observation des arbres et calculs précédents, on a conjecturé les formules suivantes :

$$p_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \times a_{n-1} \qquad\qquad a_n = \frac{1}{n} \times p_n + \frac{n-1}{n} \times a_{n-1}$$

Pièce d'or piochée en premier

Si on pioche une pièce d'argent au début on retourne sur un arbre A_{n-1}

On pioche la pièce d'or et retourne en base neutre

On pioche la pièce d'argent et on retourne sur un arbre A_{n-1}

On veut démontrer que pour n'importe quel *n* entier strictement supérieur à 1 : $p_n = \frac{1}{2}$

On sait que c'est vrai pour *n* = 2 . On veut donc prouver que si pour un entier *n* strictement supérieur à 1, $p_n = \frac{1}{2}$ alors $p_{n+1} = \frac{1}{2}$. Nous réalisons donc un raisonnement par récurrence.

On suppose que pour *n* un entier strictement supérieur à 1 : $p_n = \frac{1}{2}$

<u>Calcul de</u> a_{n-1} :

$$p_n = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \times a_{n-1}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n} \times a_{n-1}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \times a_{n-1}$$

$$a_{n-1} = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{\frac{n-2}{2 \times n}}{\frac{n-1}{n}} = \frac{(n-2)n}{2\text{n}(n-1)} = \frac{(n-2)}{2(n-1)}$$

<u>Calcul de</u> a_n :

$$a_n = \frac{1}{n} \times p_n + \frac{n-1}{n} \times a_{n-1}$$

$$a_n = \frac{1}{2\text{n}} + \frac{(n-1) \times (n-2)}{n \times 2(n-1)}$$

$$a_n = \frac{1}{2\text{n}} + \frac{n-1}{n} \times \frac{n-2}{2(n-1)}$$

$$a_n = \frac{1}{2\text{n}} + \frac{n-2}{n \times 2}$$

$$a_n = \frac{n-1}{2\text{n}}$$

<u>Calcul de</u> p_{n+1}

$$p_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times a_n$$

d'où $p_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \times \frac{n-1}{2\text{n}}$ d'où $p_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n \times (n-1)}{(n+1) \times 2\text{n}}$ d'où $p_{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n-1}{2(n+1)}$

d'où $p_{n+1} = \frac{2}{2(n+1)} + \frac{n-1}{2(n+1)}$ d'où $p_{n+1} = \frac{2+n-1}{2(n+1)}$ d'où $p_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)}$ d'où

$p_{n+1} = \frac{\cancel{n+1}}{2\cancel{(n+1)}}$ et donc $\boxed{p_{n+1} = \frac{1}{2}}$

Conclusion du raisonnement par récurrence :

On a $p_2=\frac{1}{2}$ et si $p_n=\frac{1}{2}$ alors $p_{n+1}=\frac{1}{2}$.

Donc, pour tout entier n positif strictement supérieur à 1 : $p_n=\frac{1}{2}$.

Le chevalier ne peut que vivre ou mourir ! Donc la probabilité d'épouser la princesse est $1-p_n=\frac{1}{2}$.

Conclusion

Le chevalier a donc autant de chances d'épouser la princesse que de mourir avec une pièce d'or et un nombre quelconque de pièces d'argent.

4 – Extension et programmation du jeu

Mais que deviennent nos résultats si on fait également varier le nombre de pièces d'or ? Les probabilités de vivre et de mourir restent-elles les mêmes ?
Dans ce but, nous avons codé en Java le programme suivant qui permet de simuler un grand nombre de tirages et donc d'avoir une idée du résultat. (1)

Le programme :

```
package norm;

import java.util.Random;          //début : appel des bibliothèques
import java.util.Scanner;

public class prog {

        public static void main(String[] args) {                    //début de code
                Scanner sc = new Scanner(System.in);
//demande du nombre de pièces d'or, d'argent et de tirages
                System.out.println("Veuillez saisir le nombre de pièces d'argent:");
                int arg = sc.nextInt();
                System.out.println("Veuillez saisir le nombre de pièces d'or :");
                int or = sc.nextInt();
                System.out.println("Veuillez saisir le nombre de tirages :");
                int t = sc.nextInt();
                int n =0;
                                        //déclaration des variables
                int base=2;                                         //la base
                int orj=0;                                //valeur des pièces d'or dans un
tirage
                int v=0 ;
                int argj=0;                         //valeur des pièces d'argent dans un tirage
                int va=0;                                           //nombre de victoires argent
                int vo =0;                                          //nombre de victoires or

                boolean test=false;
                while(t != 0){                      //boucle effectuant la répétition des tirages
```

```
			t=t-1;
			base=2;
			n = arg + or;
			System.out.println(n);
			argj=arg;
			orj = or;
			test=true;
			while(test){						//boucle effectuant un tirage
				Random rand = new Random();			//tirage aléatoire
				v = 1+rand.nextInt(n);
		if(v>argj && (base == 1 || base==2))
		{
			orj=orj-1;
			base=1;
		}
		else if(v>argj)base=2;

		if(v<=argj && (base == 3 || base==2))
		{
		 argj=argj-1;
		 base=3;
		}
		else if(v<=argj)base=2;

		n= argj+orj;

		System.out.println("n="+n+" orj="+orj+" argj="+argj+" v="+v+"	"+t);  //informations sur le tirage

		if(argj==0  && orj>=1){
	//calcul du nombre de victoires argent et or
			vo=vo+1;
			test=false;
			System.out.println("vo");
		}
		if(orj==0 && argj>=1){
			va=va+1;
			test=false;
			System.out.println("va");
			}
		}
		}
		System.out.println("va="+va+" vo="+vo+" total="+(va+vo));
//donne nombre de victoires argent, or et total de victoires
```

Ce programme donne des résultats étonnants.
En effet il indique que la probabilité de finir avec un pièce d'or et celle de finir avec une pièce d'argent est sensiblement la même quel que soit le nombre de pièces d'or et d'argent. On aurait donc encore la même probabilité de vivre ou de mourir. Mais ce résultat n'est qu'une conjecture, nous ne l'avons pas démontré.

Note d'édition

(1) L'édition regrette le manque de clarté dans l'explication de l'algorithme en Java, difficilement accessible aux autres élèves.