

MATH.en.JEANS

La pyramide habitée

Année 2018-2019

POULLE MAZZONI Margot
KIPEMBI Bernice
BOUCHER Romane
LE QUEMENT Matthieu
ZEDJAOUI Ella

Collège La Rose Blanche
34 rue Georges Picquart
Paris 17^e

Enseignant : Mme GRANIER

Chercheur : Mme PERROT-DOCKES



Problématique :

Marc habite au 2012. Yann, son voisin du dessus joue de la musique beaucoup trop fort. Marc en a marre et voudrait aller le voir. Cependant, il ne sait pas quel est le numéro de l'appartement de Yann. A quel appartement Marc doit aller pour trouver Yann?

Premier constat :

Nous avons pu remarquer que chaque appartement se trouvant à l'extrémité droite de la pyramide était un carré parfait.

Exemples : 1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ...

Cela va nous servir pour déterminer l'appartement le plus à droite d'un étage.

Notation :

Dans la suite du problème, on devra étudier la partie entière des nombres.

On notera alors, si x est un nombre quelconque positif :

Ent (x) = partie entière de x

Par exemple, pour $x = 45,32$

Ent (45,32) = 45

La partie entière de 45,32 est 45.

Première recherche :

Si on nous indique un numéro d'appartement, nous calculons sa racine carrée et ajoutons 1 à sa partie entière. Cela nous donne l'étage où il se trouve.

Exemple : Prenons l'appartement 18. La partie entière de la racine carrée de 18 vaut 4. On ajoute 1 : $4+1 = 5$.

L'appartement 18 se trouve au 5^e étage.

Exception :

Si le numéro de l'appartement est un carré parfait, alors on n'ajoute pas 1 au résultat de la racine carrée.

Exemple : Prenons l'appartement 16 . La racine carrée de 16 est 4.

L'appartement sera donc au 4^e étage.

Raisonnement :

Puisque nous savons désormais comment trouver l'étage d'un appartement, nous avons déduit un programme de calcul afin de trouver où se situe l'appartement :

Étape 1 :

Trouver l'étage sur lequel se trouve l'appartement :

Exemple : $\text{Ent}(\sqrt{18})+1=5$

Étape 2 :

On détermine l'appartement se trouvant tout à droite de l'étage en calculant le carré de l'étage.

Exemple : $5 * 5 = 25$

L'appartement le plus à droite du 5^e étage est l'appartement 25.

Étape 3 : On soustrait le numéro le plus à droite de l'étage avec le numéro de l'appartement. Cette différence va nous servir pour se situer sur l'étage du dessus.

Exemple : $25 - 18 = 7$

Il y a 7 appartements d'écart entre notre appartement et l'appartement le plus à droite de l'immeuble.

Étape 4 :

Nous connaissons l'étage du dessus, il s'agit de notre étage -1. Pour trouver l'appartement le plus à droite de l'étage du dessus, il suffit de calculer le carré de l'étage:

Exemple : $4 * 4 = 16$

Étape 5:

Grâce à la soustraction précédente et en

sachant qu'entre chaque étage il y a 2 appartements de différence (un de moins à droite et un de moins à gauche), on peut trouver le numéro de l'appartement du dessus en:

> enlevant 1 à la différence des deux appartements

> en le soustrayant au numéro de l'appartement du dessus le plus à droite.

Ce qui nous donne le numéro de l'appartement de «Yann» .

Exemple : $16-(7-1) = 16-6 = 10$

L'appartement au-dessus du 18 est l'appartement 10



Résolvons notre problème de départ
Appliquons notre programme de calcul
à l'appartement 2012 :

Appartement de Marc: 2012

Étape 1: $\text{Ent}(\sqrt{2012})+1=45$

L'appartement de Marc est au 45^e étage.

Étape 2: $45^2 = 2025$

L'appartement le plus à droite du 45^e étage est le numéro 2025.

Étape 3: $2025 - 2012 = 13$

Étapes 4 et 5: $44^2 = 1936$

$1936 - (13-1) = 1924$

L'appartement de Yann est l'appartement 1924

Généralisation de la formule:

Notons x =appartement de Marc

Étape 1: Racine carré du numéro de l'appartement pour trouver l'étage :

$$\text{Ent}(\sqrt{x})+1$$

Étape 2: $[\text{Ent}(\sqrt{x})+1]^2$ pour trouver l'appartement le plus à droite à l'aide d'une identité remarquable :

$$[\text{Ent}(\sqrt{x})+1]^2 = [\text{Ent}(\sqrt{x})]^2 + 2\text{Ent}(\sqrt{x}) + 1$$

Étape 3: On calcule la différence:

$$[\text{Ent}(\sqrt{x})+1]^2 - \text{Ent}(\sqrt{x})^2 = 2\text{Ent}(\sqrt{x}) + 1$$

Étapes 4 et 5:

Calculons pour trouver la formule :

$$\text{Formule} = [\text{Ent}(\sqrt{x})]^2 - [(\text{Ent}(\sqrt{x})+1)^2 - (\sqrt{x})^2]$$

$$= [\text{Ent}(\sqrt{x})]^2 - [\text{Ent}(\sqrt{x})]^2 - 2\text{Ent}(\sqrt{x}) - 1 + x + 1$$

$$= x - 2\text{Ent}(\sqrt{x})$$

Vérification:

Remplaçons x par 2012:

$$2012 - 2 \times \text{Ent}(\sqrt{2012}) = 2012 - 2 \times 44 \\ = 2012 - 88 = 1924$$

Aller plus loin : Pour trouver l'appartement du dessous



Pour le trouver on suit exactement le même raisonnement. Cependant il y a une différence avec notre formule. Nous avons, dans l'étape 2, changé le +1 en -1 pour trouver l'étage du dessous.

Dans l'étape 3 nous avons dû aussi effectuer des modifications, lorsque nous calculons l'écart entre l'appartement de Marc et l'appartement le plus à droite : nous savons que cet écart est le même (+1) à l'étage du dessous. Nous calculons la différence entre le numéro de l'appartement le plus à droite avec le numéro de notre appartement.

Cette différence va nous servir à déterminer la différence entre l'appartement du dessous et le numéro de l'appartement le plus à droite au-dessous.

La formule pour trouver l'appartement du dessous est :

$$x - 2\text{Ent}(\sqrt{x}) + 2$$

Conclusion

La réponse à notre problème est : Yann se trouve à l'appartement 1924. En utilisant la formule : on peut déterminer l'emplacement de n'importe quel appartement du dessous.

$$x - 2\text{Ent}(\sqrt{x})$$