Recherche d'une solution à une équation

2020-2021

Nom, prénom et niveaux des élèves :
Damien BATTAIS, Baptiste CASTEL, Yannael MARTENS, Tristan RIVOAL, classe de terminale

Établissement : Lycée Le Likès - La Salle, Quimper

Enseignant : Yann Cogan

Chercheur : On en cherche.

Table des matières

1 Présentation du sujet

On cherche des solutions entières positives à l'équation :

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}=4.$$

2 Annonces des conjectures et résultats obtenus

Après une recherche infructueuse de solutions par un algorithme simple de test, nous émettons la conjecture que cette équation n'admet pas de solution entière positive.
Nous trouvons cependant des valeurs qui donnent un résultat proche de 4. Par exemple en prenant $x = 1$, $y = 3$ et $z = 15$ (cas que nous noterons : $(1,3,15)$) le calcul donne approximativement 3,99. Le cas $(5,27,120)$ donne approximativement 4,00001.
Nous trouvons des solutions entières exactes si nous acceptons les nombres négatifs, comme par exemple : $(-1,4,11)$ ou $(-5,9,11)$.
En acceptant toutes les valeurs réelles possibles, on se rend compte que l'ensemble des solutions est une famille de triplets que l'on peut représenter par des points dans l'espace. Ces points forment une surface qui a la structure d'un cône (mais ce n'est pas le cône de révolution usuel). Le problème se ramène alors à trouver des points de cette surface à coordonnées entières positives.
Nous pouvons ramener ce problème à celui de trouver des points à coordonnées rationnelles sur la courbe intersection de cette surface avec le plan d'équation $z = 1$. A partir des points que nous connaissons nous avons un algorithme de construction de nouveaux points. Cet algorithme nous permet, au bout du dixième point, d'obtenir une solution au problème. La théorie affirme que cette solution est la plus petite qui existe.
La voici :
$x = 36875131794129999827197811565225474825492979968971970996283137471637224634055579$;
$y = 4373612677928697257861252602371390152816537558161613618621437993378423467772036$;
$z = 154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999$.

3 Texte de l'article

3.1 Premières considérations

Nous avons affaire à une équation avec trois inconnues, mais leurs valeurs doivent être des entiers positifs, c'est à dire des éléments de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.

3.1.1 Ensemble de définition

Comme il se doit, nous allons d'abord considérer l'ensemble de définition de cette équation. Comme les nombres du triplet (x, y, z) sont des entiers positifs il faut et il suffit d'exclure les cas où deux nombres du triplet (x, y, z) seraient nuls, car cela amènerait des dénominateurs nuls.

3.1.2 Réglons son compte à un cas

Nous venons de voir que deux inconnues ne peuvent être nulles en même temps. Que se passe-t-il si l'une d'elles l'est ?
Posons par exemple : $z = 0$. L'équation devient alors :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4$$

On observe que l'on peut chercher, comme problème intermédiaire, un nombre qui augmenté de son inverse donne 4. Posons $a = \frac{x}{y}$ et résolvons dans l'ensemble $\mathbb{Q}^*$ des rationnels non nuls l'équation :

$$a + \frac{1}{a} = 4 \qquad \Longleftrightarrow \qquad a^2 - 4a + 1 = 0$$

Le calcul du discriminant ($\Delta = 12$) ou la mise sous forme canonique du membre de gauche ($(a-2)^2 - 3$) nous convainquent que les solutions de cette équation s'écriront nécessairement avec une racine carrée.
Or un nombre qui s'écrit nécessairement avec une racine carrée n'est pas un nombre rationnel, ce qui implique qu'il n'existe pas de couple d'entiers (x, y) tels que $\frac{x}{y} = a$.
Il n'existe donc pas, à fortiori, de couple d'entiers naturels (x, y) vérifiant l'équation si $z = 0$.

<u>Autre méthode</u> : On aurait aussi pu traiter la question ainsi :

$$\begin{aligned}
& \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 4 \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 + y^2 = 4xy && \textit{en multipliant chaque membre de l'égalité par } xy \\
\Longleftrightarrow \quad & x^2 - 4xy + y^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x-2y)^2 - 4y^2 + y^2 = 0 && \textit{sorte de mise sous forme canonique} \\
\Longleftrightarrow \quad & (x-2y)^2 - 3y^2 = 0 \\
\Longleftrightarrow \quad & (x - 2y - \sqrt{3}y)\ ((x - 2y - \sqrt{3}y) = 0
\end{aligned}$$

Cette équation produit nul nous amène à deux relations possibles entre x et y :
Soit $x = (2+\sqrt{3})y$, soit $x = (2-\sqrt{3})y$.
L'irrationalité du nombre $\sqrt{3}$ implique celle de $2+\sqrt{3}$ et de $2-\sqrt{3}$.
Donc si y est entier, x ne l'est pas, et réciproquement.

3.1.3 Symétries de l'équation

On observe que si l'on intervertit les lettres x, y et z dans l'équation, celle-ci reste identique. Donc tout résultat obtenu sera valable pour toute permutation des inconnues.

Cela nous permet, à partir du résultat du paragraphe **3.1.2** ci-dessus, d'affirmer qu'il n'existe aucune solution de l'équation telle que l'une des inconnues est nulle. Nous allons poser à partir de maintenant : $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$.

On remarque également que si l'on multiplie chacune des trois inconnues par un nombre k non nul, alors le résultat du calcul du membre de gauche sera identique. Cela implique que si nous trouvons un triplet solution (x, y, z), alors tout triplet de la forme (kx, ky, kz) sera aussi solution dès lors que k est un entier naturel non nul. Une solution nous en fournit une infinité.

3.1.4 Transformation de l'équation

Pour éviter d'avoir des dénominateurs, on peut vouloir multiplier chaque membre de l'égalité par le produit $(x+y)(y+z)(z+x)$:

$$x(x+y)(x+z)+y(y+x)(y+z)+z(z+x)(z+y)=4(x+y)(y+z)(z+x)$$

$$x^3+x^2z+x^2y+xyz\ +\ y^3+y^2z+y^2+xyz\ +\ z^3+z^2x+z^2y+xyz=$$
$$4(xyz+xyx+xzz+xzx+yyz+yyx+yzz+yzx)$$

$$x^3+y^3+z^3-3x^2(y+z)-3y^2(x+z)-3z^2(x+y)-5xyz=0$$

On obtient une équation polynomiale de degré 3 à trois inconnues.
Toutes les tentatives pour la simplifier davantage ont échoué.

3.2 Approche numérique

A l'aide d'un algorithme nous pouvons aisément tester des triplets (x, y, z) d'entiers naturels non nuls pour voir si le résultat du calcul $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{x+y}$ donne 4.
Nous savons, d'après le résultat du paragraphe **3.1.3** que si nous avons testé le triplet $(1,2,3)$, il est inutile de tester les triplets $(1,3,2)$, $(2,1,3)$, $(2,3,1)$, $(3,1,2)$ et $(3,2,1)$.
Convenons de ne tester que des triplets dans l'ordre croissant, jusqu'à $(9,9,9)$.
Ci-dessous l'algorithme réalisé écrit en langage *Python*.

```python
for x in range(1,10):
  for y in range(x,10):
    for z in range(y,10):
      v=x/(y+z)+y/(x+z)+z/(x+y)
      print ("Le triplet (",x,",",y,",",z,") donne : ",v)
```

Listing 1 – Recherche de solution

On observe les résultats intéressants suivants :

$$\frac{1}{1+3}+\frac{1}{1+3}+\frac{3}{1+1}=2 \qquad \text{donc le triplet } (1,1,3) \text{ donne } 2.$$

$$\frac{1}{1+8}+\frac{1}{1+8}+\frac{8}{1+1}=4+\frac{2}{9} \qquad \text{donc le triplet } (1,1,8) \text{ donne un résultat supérieur à } 4.$$

Il existe des triplets qui donnent des résultats inférieurs à 4, et d'autres des résultats supérieurs à 4. Il existe aussi des triplets qui donnent des résultats entiers.
Tout cela a de quoi nous rendre optimiste sur la perspective de trouver une solution, dans l'infinité des combinaisons qui existent.

En allant jusqu'à 100, le programme teste 171 700 triplets en moins d'une seconde mais aucun n'est solution.
En allant jusqu'à 200, le programme teste 1 353 400 triplets en quelques secondes, mais aucun n'est solution.

Remarque : On peut, à titre d'exercice chercher à déterminer le nombre de triplets testés en fonction de la valeur maximale des inconnues.

En allant jusqu'à 1000, les ordinateurs travaillent des heures, mais ne trouvent toujours pas de triplet solution.

A défaut de trouver un triplet solution, cherchons des triplets qui donnent une valeur proche de 4 :

```python
max = int(input("Valeur maximale testee : "))
plus_proche=0
for x in range(1,max+1):
  for y in range(x,max+1):
    for z in range(y,max+1):
      v=x/(y+z)+y/(x+z)+z/(x+y)
      if abs(v-4) < abs(plus_proche-4):
         print ("Le triplet (",x,",",y,",",z,") donne un resultat qui vaut : ", v)
         plus_proche = v
```

Listing 2 – Recherche de solution

On trouve par exemple

— le triplet $(1,3,15)$ qui fournit approximativement : $3,99$,

— le triplet $(5,27,120)$ qui fournit approximativement : $4,000\,01$,

— le triplet $(35,132,627)$ qui fournit approximativement : $4,000\,000\,1$.

En explorant beaucoup de triplets, il semble que l'on peut s'approcher autant que l'on veut de la valeur 4, mais sans l'atteindre pour les valeurs testées.

3.3 Extensions du domaine d'exploration

N'ayant pas trouvé de réponse au problème par voie algébrique ni numérique, nous allons étendre l'ensemble des triplets candidats.

3.3.1 Plus de valeurs interdites!

En premier lieu, nous allons cesser de nous interdire des triplets en considérant l'équation sans fraction obtenue au paragraphe **3.1.4** :

$$x(x+y)(x+z)+y(y+x)(y+z)+z(z+x)(z+y)=4(x+y)(y+z)(z+x)$$

Cela nous simplifiera l'étude.
Il sera toujours temps, à la fin, d'éliminer les cas éventuels où $x+y=0$ ou $x+z=0$ ou $y+z=0$.

3.3.2 Autorisons les valeurs négatives!

Lançons un programme pour tester des triplets comprenant des valeurs négatives :

```
max = int(input("Valeur maximale testee : "))
for x in range(-max,max+1):
  for y in range(x,max+1):
    for z in range(y,max+1):
      # Les sommes, pour simplifier l'ecriture
      s=x+y
      t=x+z
      u=y+z
      # Le membre de droite de l'egalite
      d=x*s*t+y*s*u+z*t*u
       # Le membre de gauche de l'egalite
      g=4*s*t*u
      if d == g :
         print ("Le triplet (",x,",",y,",",z,") est solution.")
```

Listing 3 – Recherche de solution

Nous trouvons des cas simples, qui doivent être exclus des solutions de la première équation à cause des dénominateurs :
Évidemment $(0,0,0)$, mais aussi $(1,-1,0)$, $(1,1,-1)$, et tous leurs multiples entiers.

Nous trouvons aussi des cas simples qui sont solution de la première équation :

Le triplet $(-1,4,11)$ donne : $\dfrac{-1}{15}+\dfrac{4}{10}+\dfrac{11}{3}=\dfrac{-2+12+110}{30}=\dfrac{120}{30}=4$;

Le triplet $(-5,9,11)$ donne : $\dfrac{-5}{20}+\dfrac{9}{6}+\dfrac{11}{4}=\dfrac{-15+90+165}{60}=\dfrac{240}{60}=4$.

3.3.3 Autorisons tous les nombres réels!

Dans ce cas, nous savons qu'il y a une infinité de solutions.
En effet, il suffit de fixer deux des nombres du triplet pour obtenir une équation avec une inconnue. L'équation sans fraction nous montre qu'alors nous obtiendrons une équation polynomiale de degré 3. Or une équation polynomiale de degré 3 a toujours au moins une solution dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (conséquence des limites en l'infini et du théorème des valeurs intermédiaires).

Considérons par exemple le triplet $(x, 1, 2)$.
L'équation est alors, d'après l'expression obtenue au paragraphe **3.1.4** :

$$\begin{aligned} x^3 + 1 + 8 - 3x^2 \times 3 - 3(x+2) - 3 \times 4(x+1) - 10x = 0 \\ x^3 - 9x^2 - 25x - 9 = 0 \end{aligned}$$

Si l'ensemble des solutions de cette équation admet un entier naturel, nous aurons une solution au problème. Un outillage numérique nous permet de savoir que cette équation admet trois solutions qui valent approximativement : -1,9 ; -0,4 et 11,3. Pas de chance...

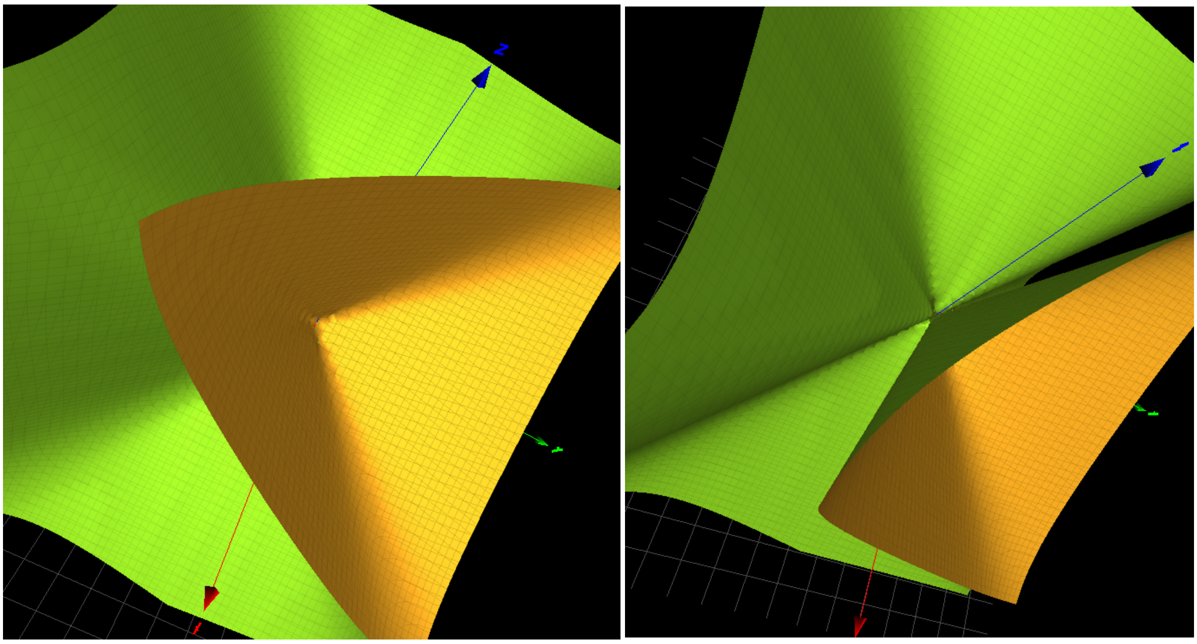
3.4 Approche géométrique

3.4.1 Surface solution

Nous allons reformuler le problème en termes géométriques à partir de l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^3$ de l'équation sans fraction.
A chaque triplet (x, y, z), associons le point de l'espace de coordonnées (x, y, z), et appelons (E) l'ensemble des points de l'espace dont les coordonnées vérifient l'équation.

Le résultat obtenu au paragraphe **3.3.3** nous assure que toute droite parallèle à l'un des axes du repère coupera cet ensemble en un, deux ou trois points.

Représentons cette surface dans l'espace. Nous obtenons quelque chose qui ressemble à deux feuilles ondulées qui se touchent en le point origine O.



Remarque : On peut raisonnablement penser que cette surface (E) est la frontière entre la zone de l'espace correspondant à un calcul qui donne plus que 4, et celle correspondant à un calcul qui donne moins que 4.

Nous savons déjà que l'ensemble (E) contient les points :

$$O(0,0,0)\ ,\ A(0,-1,1)\ , B(-1,1,1)\ ,\ C(2-\sqrt{3},0,1)\ ,\ D(2+\sqrt{3},0,1)$$

et tous ceux obtenus par permutation des coordonnées (cf. **3.1.3**).

Nous savons, d'après le paragraphe **3.1.3** que si le point $M(x,y,z)$ appartient à (E) alors, pour tout réel k, le point de coordonnées (kx,ky,kz) appartient aussi à (E). Cela veut dire que si le point M n'est pas l'origine O du repère, la droite (OM) est incluse dans (E). Il convient donc d'imaginer (E) comme une surface composée de droites passant par O. On dit que l'ensemble (E) possède une structure de cône de sommet O.

Cela implique que si l'on connaît l'intersection de (E) avec un plan (P) ne contenant pas O, alors on a toutes les informations sur (E), ou presque. En effet l'intersection de (E) avec tout plan parallèle au plan (P) sera un agrandissement ou une réduction de l'intersection de (E) avec (P). Il resterait juste à considérer l'intersection de (E) avec le plan parallèle à (P) passant par O.

Nous sommes à la recherche de points à coordonnées entières positives sur ce cône.

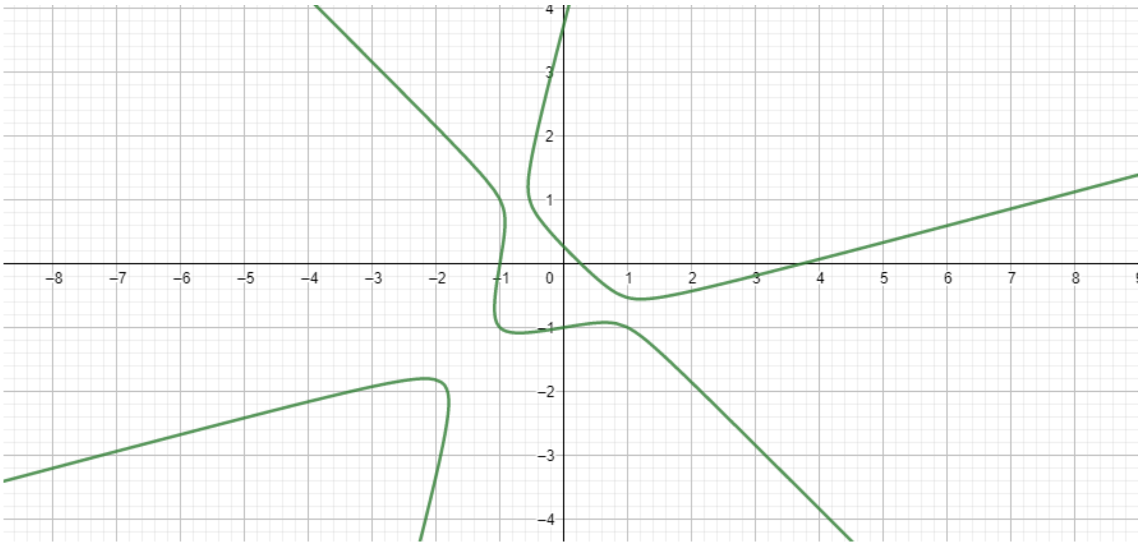
3.4.2 Intersection de (E) avec le plan d'équation $z = 1$

Choisissons le plan d'équation $z = 1$, baptisons le (P_1), et munissons le du repère $(K, \vec{i}, \vec{j})$, où K est le point de coordonnées $(0, 0, 1)$.
Le cas du plan d'équation $z = 0$ a déjà été traité à la question **3.1.2**, nous avons vu qu'il n'apporte pas de solution au problème.

Dans ce repère, l'équation de l'intersection de (E) avec (P_1) est :

$$x^3 + y^3 + 1 - 3x^2(y+1) - 3y^2(x+1) - 3(x+y) - 5xy = 0$$

Représentons cet ensemble dans le plan d'équation $z = 1$. Sans grande surprise nous observons une courbe ; celle-ci semble être en plusieurs morceaux.



Remarque : La courbe est symétrique par rapport à la droite d'équation x = y, conséquence de l'interchangeabilité de x et y dans l'équation.

On voit sur cette courbe les points associés aux solutions que l'on obtient par permutation des coordonnées des points A, B, C et D nommés au paragraphe précédent, à savoir les triplets :

$$(-1\ ,\ 0\ ,\ 1)\ ,\ (-1\ ,\ \pm 1\ ,\ 1)\ ,\ (1\ ,\ -1\ ,\ 1)\ ,\ (0\ ,\ -1\ ,\ 1)\ ,\ (0\ ,\ 2 \pm \sqrt{3}\ ,\ 1)\ ,\ (2 \pm \sqrt{3}\ ,\ 0\ ,\ 1)$$

On sait que les cinq premiers sont des solutions ajoutées quand on a supprimé les dénominateurs de l'équation initiale, et que les quatre (2×2) derniers contiennent un nombre irrationnel. Aucune solution au problème parmi ces points, même en acceptant les entiers négatifs.

Le problème plan semble plus abordable que le problème dans l'espace. Nous savons que presque toute l'information sur le cône (E) est renfermée dans cette courbe que nous allons appeler (C), mais cette courbe peut-elle nous aider à résoudre notre problème ?

La réponse est oui, après avoir observé ce qui suit.

Si nous trouvons un point à coordonnées rationnelles sur la courbe (C), disons le point M de coordonnées (x, y), qui dans l'espace a pour coordonnées $(x, y, 1)$, alors nous pouvons affirmer que pour tout réel k le points $M_k(kx, ky, k)$ appartient à la surface (E) (d'après **3.1.3**). Il suffit de choisir k multiple des dénominateurs des fractions x et y, pour que le point M_k ait des coordonnées entières. Si x et y sont positifs, alors nous avons trouvé une solution de l'équation initiale.

Il semble que la courbe (C) coupe la droite d'équation $y = x$ en trois points. L'un d'eux est connu : $(-1, -1)$. On sait donc qu'en remplaçant y par x, on obtiendra une équation polynomiale de degré 3 en x dont on connaît une solution. Nous pourrons alors trouver les valeurs exactes des deux autres solutions, et si elles sont rationnelles, nous aurons trouvé une solution au problème. Allons-y :

$$\begin{array}{lrl}
 & 2x^3 + 1 - 6x^2(x+1) - 6x - 5x^2 = 0 & \\
\Longleftrightarrow & -4x^3 - 11x^2 - 6x + 1 = 0 & \text{on vérifie au passage que -1 est bien solution} \\
\Longleftrightarrow & 4x^3 + 11x^2 + 6x - 1 = 0 & \\
\Longleftrightarrow & (x+1)(4x^2 + 7x - 1) = 0 &
\end{array}$$

Le discriminant du second facteur vaut : $\Delta = 7^2 - 4 \times 4 \times (-1) = 65$.
Ce n'est pas le carré d'un rationnel, donc les deux autres points ne fourniront pas de solution au problème dans l'ensemble (E).

Nous n'avions aucune garantie de trouver une solution car le second facteur de l'équation était un polynôme de degré 2, dont les racines sont en général irrationnelles. Mais si nous considérons une situation équivalente dans laquelle nous connaissons deux racines rationnelles et non une seule, nous pourrons factoriser deux fois et le dernier facteur sera un polynôme de degré 1, dont les racines sont rationnelles si les coefficients le sont.

On en conclue que si on considère la droite passant par deux points de (C) à coordonnées rationnelles, elle coupera nécessairement (C) en un troisième point à coordonnées rationnelles également. Cela nous permet d'obtenir de nouvelles solutions à partir de celles que nous connaissons déjà. Nous espérons obtenir ainsi un processus itératif qui nous fournira des solutions dans $\mathbb{Z}^3$ à l'équation initiale. Au regard de la courbe, il ne semble pas irréaliste d'espérer que dans cette construction de points on obtienne à un moment un point dont les coordonnées seront positives. Même si la partie de la courbe dans la zone du plan à coordonnées positives est comparativement "petite".

Quel avantage peut avoir ce procédé de recherche de solution qui est plus complexe que celui déjà mis en oeuvre avec l'algorithmique ? La méthode précédente testait tous les triplets, alors que celle-ci nous donne la certitude que chaque nouveau triplet sera une solution dans $\mathbb{Z}^3$ de l'équation.

3.4.3 Recherche de points à coordonnées rationnelles à partir des points connus

Première approche

On pense naturellement aux 5 points simples :

$$(-1\ ,\ 0)\ \ ,\ \ (-1\ ,\ \pm 1)\ \ ,\ \ (1\ ,\ -1)\ \ ,\ \ (0\ ,\ -1)$$

On observe qu'ils sont tous sur les droites d'équation $y = -1$ et $x = -1$. Le seul espoir d'obtenir un point différent est d'utiliser les couples de points $(0, -1)$ et $(-1, 1)$ (ou leurs symétriques $(-1, 0)$ et $(1, -1)$). Allons y gaiement :

La droite qui passe par ces deux points a pour équation : $y = -2x - 1$.
Remplaçons y par son expression en fonction de x dans l'équation de (C) :

$$x^3 + (-2x-1)^3 + 1 - 3x^2((-2x-1)+1) - 3(-2x-1)^2(x+1) - 3(x+(-2x-1)) - 5x(-2x-1) = 0$$

Après un développement un peu lourd et moultes simplifications on obtient :

$$-13x(x+1)^2 = 0$$

On retrouve les solutions attendues 0 et -1, et la troisième qui est... -1. Le nombre -1 est racine double du polynôme. La droite est tangente au point de coordonnées $(-1, 1)$, donc cette piste ne fournit pas de nouveau point à coordonnées rationnelles.

Mais qu'à cela ne tienne, nous avons obtenu au paragraphe **3.3.2** d'autres solutions de l'équation. Prenons la plus simple : $(-1, 4, 11)$, dont le projeté du point de (E) associé sur notre plan d'équation $z = 1$ est :

$$P_1\left(-\frac{1}{11}, \frac{4}{11}\right)$$

Remarque : On vérifie graphiquement qu'il peut bien appartenir à (C).

Construisons un nouveau point à partir de celui-ci, et par exemple du point $A(0, -1)$:
L'équation de la droite (AP_1) est

$$y = -\frac{\frac{4}{11}+1}{\frac{1}{11}}x - 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad y = -15x - 1$$

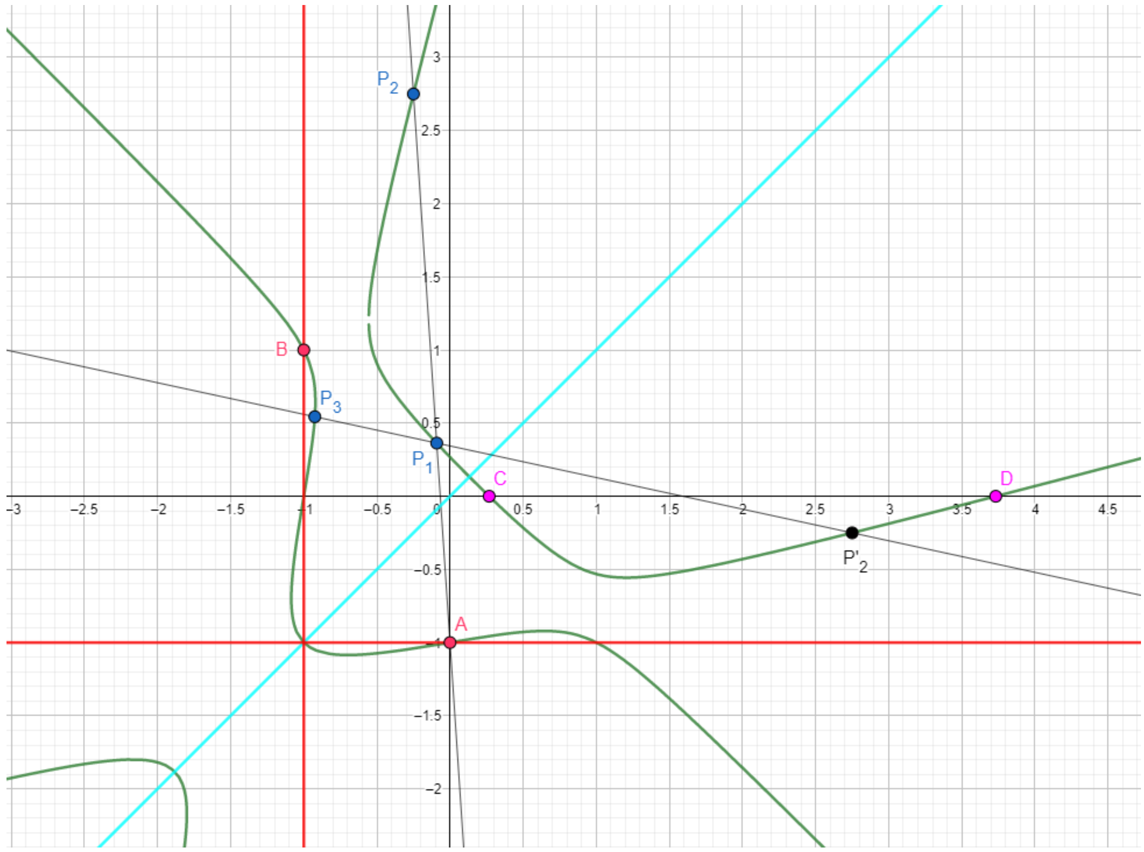
Remplaçons cette expression de y dans l'équation de la courbe (C)... ça devient un peu lourd à écrire et à faire, laissons ce travail à un logiciel de calcul formel (*wolframalph.com*). Il fournit les coordonnées du troisième point d'intersection entre la droite et la courbe :

$$P_2\left(-\frac{1}{4},\frac{11}{4}\right)$$

... point sympathique s'il en est puisqu'il figure sur un quadrillage quart d'unité, mais qui n'est autre que le projeté sur le plan d'équation $z=1$ du point de (E) associé au triplet solution $(-1,11,4)$, qui n'est qu'un avatar du point de départ...

Ne nous laissons pas décourager par cette déception, et remarquons plutôt que si le point P_2 est sur la courbe (C), son symétrique par rapport à la droite d'équation $y=x$ l'est aussi, à savoir

$$P_2'\left(\frac{11}{4},-\frac{1}{4}\right).$$



Remarque : Les points en rouge représentent les cas où $x=-1$ et $y=-1$. Comme $z=1$ dans ce *plan, ces points ne peuvent constituer une solution au problème car cela annulerait le dénominateur $x+z$ ou $y+z$ de l'équation initiale.*

La construction géométrique nous donne l'idée que le point P_3 obtenu à l'intersection de la droite (P_1P_2') et de la courbe (C) sera associé à une solution nouvelle (quoi que pas encore satisfaisante puisque son abscisse est manifestement négative).
On peut alors construire le symétrique P_3' du point P_3 par rapport à l'axe de symétrie de la courbe (C) et la droite (P_1P_3'). La troisième intersection de cette droite avec la courbe (C) sera le point P_4. Ce processus semble pouvoir être répété, dans l'espoir d'obtenir à un moment une solution au problème initial, c'est à dire un point dans le quart de plan des points de coordonnées positives.

Impasse calculatoire et piste

La simple détermination des coordonnées du point P_3 est une opération technique bien lourde à réaliser à la main, et le logiciel de calcul formel a eu recours à des valeurs approchées qui faussent le résultat. Même si la méthode semble sure, la complexité des expressions et des nombres à manipuler en valeur exacte est rédhibitoire.

Tentons d'exploiter la symétrie de la courbe (C) pour simplifier le calcul. Si on prenait pour axe des abscisses l'axe de symétrie de la courbe, on pourrait imaginer la représentation graphique d'une fonction vue en miroir (avec des valeurs interdites). Or on sait que l'équation est une équation polynomiale de degré 3. Peut-être pouvons nous obtenir, dans un nouveau repère du plan, une relation de type : $Y^2 = f(X)$, où X et Y sont les nouvelles coordonnées d'un point, et f un quotient de polynômes (une racine du dénominateur nous donnerait la double branche qui semble admettre une asymptote perpendiculaire à l'axe de symétrie).

Changement de repère

Nous allons écrire l'équation de la courbe (C) dans un repère qui a pour premier vecteur

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$$

et naturellement pour second vecteur

$$\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j}.$$

Les coordonnées (x, y) d'un point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ sont une façon de coder l'égalité :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

Or, en sommant les deux égalités définissant $\vec{u}$ et $\vec{v}$ terme à terme on obtient :

$$\vec{j} = \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

En les soustrayant on obtient :

$$\vec{i} = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v})$$

D'où :

$$\overrightarrow{OM} = x\frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) + y\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v})$$

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(x + y)\vec{u} + \frac{1}{2}(y - x)\vec{v}$$

Remarque : Nous venons de réaliser un changement de repère (changement de base pour les vecteurs). L'outil des matrices est bien pratique pour le formalisme et les calculs.
On a :

$$\left\{\begin{array}{ll} x & = X - Y \\ y & = X + Y \end{array}\right. \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

La matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est appelée matrice de changement de base.
Son inverse P^{-1} permet d'obtenir les coordonnées d'un point dans la nouvelle base à partir des coordonnées de ce point dans la base initiale.

Donc, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$, le point M a pour coordonnées $X = \frac{1}{2}(x+y)$ et $Y = \frac{1}{2}(y-x)$. Remplaçons les coordonnées (x, y) par les coordonnées (X, Y) dans l'équation de (C), après avoir observé que $x = X - Y$ et $y = X + Y$:

$$x^3 + y^3 + 1 - 3x^2(y+1) - 3y^2(x+1) - 3(x+y) - 5xy = 0$$

Tentons d'être un peu astucieux en remarquant que $xy = X^2 - Y^2$.

$$x^3 + y^3 + 1 - 3xy(x+y) - 3(x^2 + y^2) - 3(x+y) - 5xy = 0$$

$$(X-Y)^3 + (X+Y)^3 + 1 - 6(X^2 - Y^2)X - 3(X-Y)^2 - 3(X+Y)^2 - 6X - 5(X^2 - Y^2) = 0$$
$$2X^3 + 6XY^2 + 1 - 6X^3 + 6XY^2 - 3(2X^2 + 2Y^2) - 5X^2 - 6X + 5Y^2 = 0$$
$$Y^2(12X - 1) = 4X^3 + 11X^2 + 6X - 1$$

Remarque : On voit que le polynôme au dénominateur sera $12X - 1$ qui s'annule en $X = \frac{1}{12}$, et donne à la courbe (C) son asymptote dirigée par le veteur $\vec{v}$.

Remarque : En observant, grâce à la courbe (C), que -1 est nécessairement une racine du polynôme du membre de droite de l'égalité on peut écrire ainsi la relation :

$$Y^2(12X-1)=(X+1)(4X^2+5X-1)$$

Méthode simplifiée

Réalisons l'algorithme de construction de points en commençant par les points A et P_1.
Dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$: $A(0,-1)$ et $P_1(-\frac{1}{11},\frac{4}{11})$.
Dans le repère $(O,\vec{u},\vec{v})$:
$A(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$ et $P_1(\frac{3}{22},\frac{5}{22})$ et $(AP_1) : Y=\frac{8}{7}X+\frac{1}{14}$.

Résolvons alors l'équation polynomiale de degré 3 en X, connaissant deux de ses solutions : $X_A=-\frac{1}{2}$ et $X_{P_1}=\frac{3}{22}$:

$$\left(\frac{8}{7}X+\frac{1}{14}\right)^2(12X-1)=4X^3+11X^2+6X-1$$

Transformons l'égalité sous la forme : $P(X)=0$ où P est un polynôme de degré 3 pour faire apparaître une équation produit nul :

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{64}{49}X^2+\frac{8}{49}X+\frac{1}{196}\right)(12X-1)=4X^3+11X^2+6X-1\\
\iff\quad & \frac{768}{49}X^3+\frac{32}{49}X^2-\frac{33}{196}X-\frac{1}{196}=4X^3+11X^2+6X-1\\
\iff\quad & -\frac{572}{49}X^2+\frac{507}{49}X^2-\frac{299}{49}X-\frac{195}{196}=0
\end{aligned}$$

Factorisons le membre de droite par les polynômes $X+\frac{1}{2}$, puis $X-\frac{3}{22}$:

$$\begin{aligned}
& \left(X+\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{572}{49}X^2+\frac{793}{49}X-\frac{195}{98}\right)=0\\
\iff\quad & \left(X+\frac{1}{2}\right)\left(X-\frac{3}{22}\right)\left(-\frac{572}{49}X+\frac{715}{49}\right)=0
\end{aligned}$$

La racine du troisième polynôme est :

$$X_{P_2}=-\frac{\frac{715}{49}}{-\frac{572}{49}}=\frac{5}{4}.$$

Qui fournit : $Y_{P_2}=\frac{8}{7}\times\frac{5}{4}+\frac{1}{14}=\frac{21}{14}=\frac{3}{2}$.

Nous avons donc, dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$:

$$P_2\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right)$$

Et dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$:

$$P_2\left(-\frac{1}{4}, \frac{11}{4}\right)$$

Nous venons de retrouver brillamment le résultat obtenu au début de ce paragraphe...
... à ceci près que pour alléger et sécuriser les calculs un programme a été écrit (cf. annexe). Il suffit de faire boucler ce programme sur les points successifs pour, on l'espère, atteindre une solution au problème initial.

Processus itératif

Le programme nous fournit le point

$P_3\left(-\frac{8784}{9499}, \frac{5165}{9499}\right)$ dans $(K, \vec{i}, \vec{i})$, donc $P_3\left(-\frac{8784}{9499}, \frac{5165}{9499}, 1\right)$ dans $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

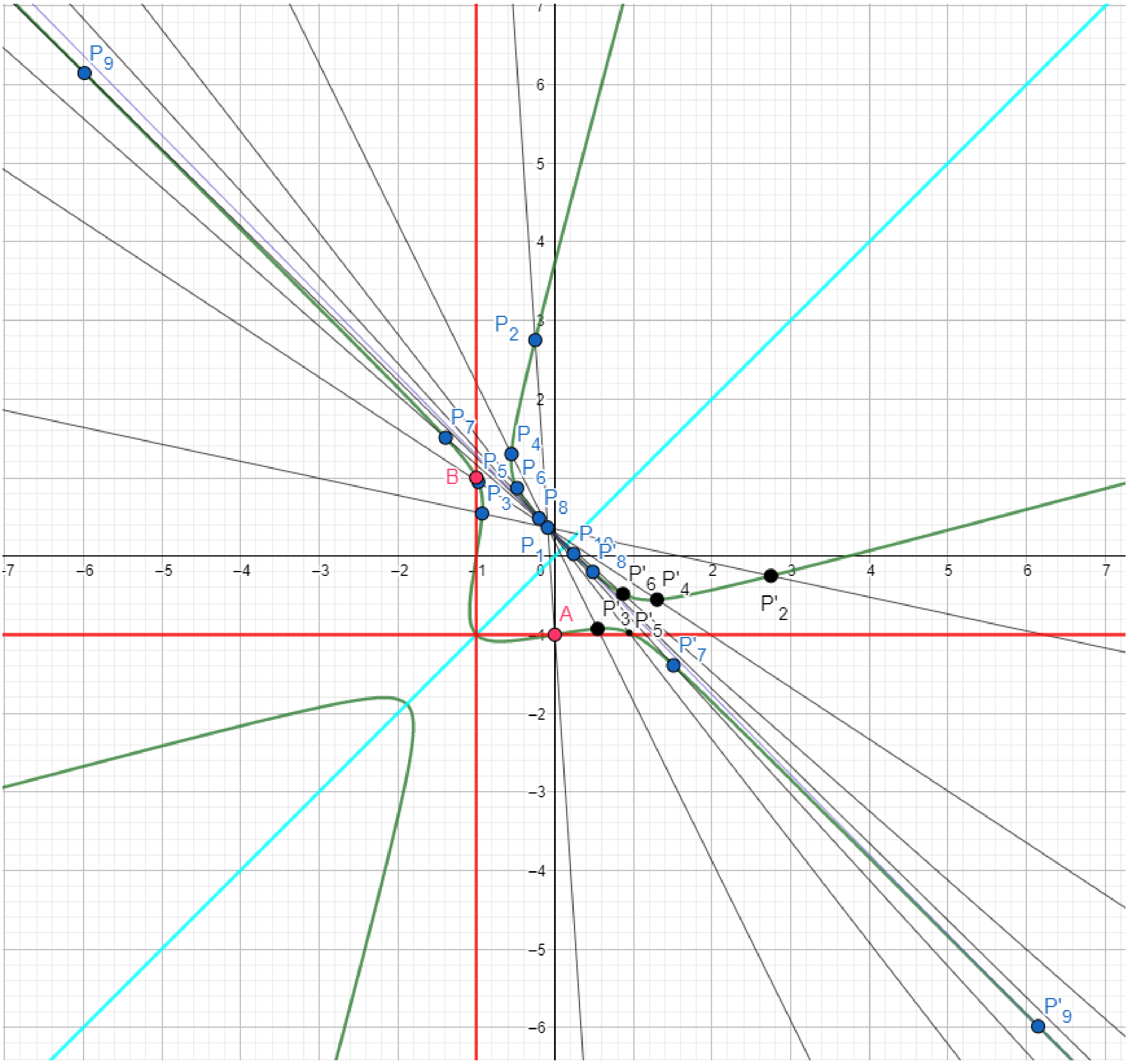
En multipliant les trois coordonnées par 9499 on obtient un point de (E) qui fournit le triplet solution :

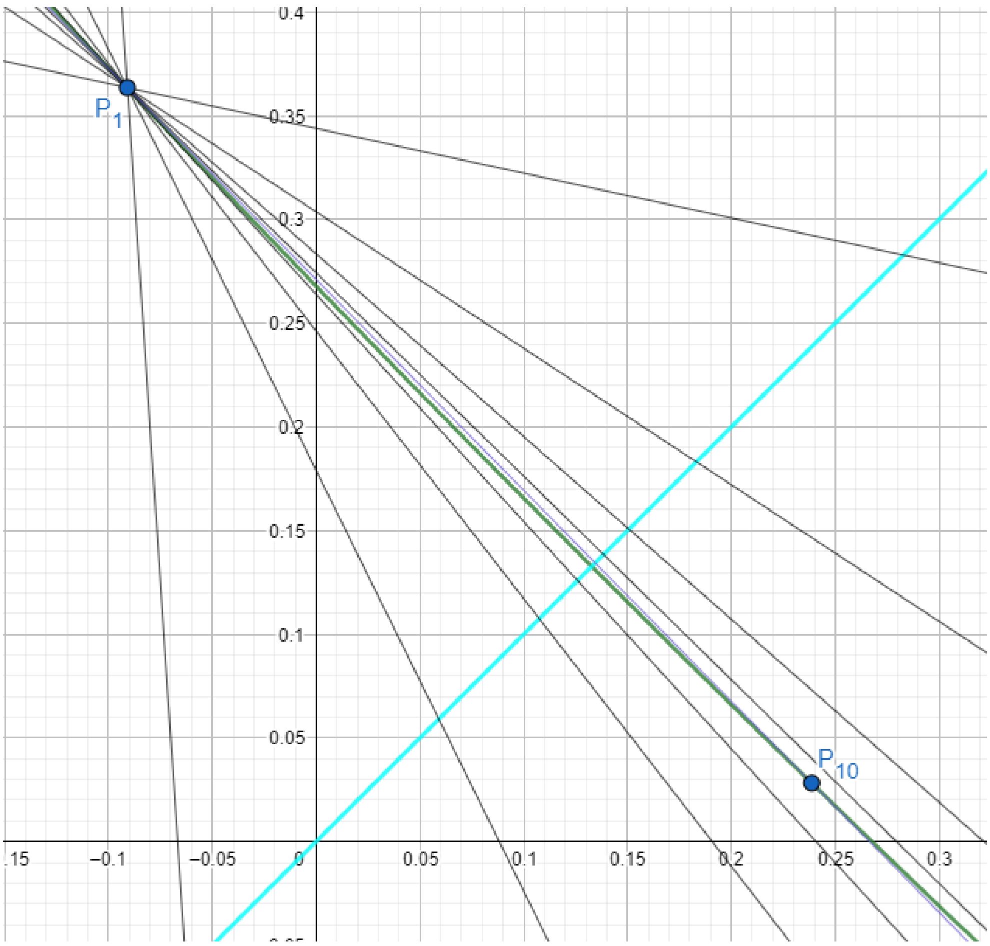
$$(-8748\ ,\ 5165\ ,\ 9499).$$

Il n'est pas solution de l'équation initiale comme nous l'avions deviné graphiquement car l'un des trois nombre est encore négatif.

Il en est de même pour les points suivants... jusqu'au point P_{10}.

Sur les deux images ci-dessous on peut voir les droites de construction des points P_2 à P_{10}. On observe que c'est un point P_9 loin de l'origine qui a permis d'obtenir le point P_{10}, premier à coordonnées positives.


P9
P2
P7
P4
B
P5
P6
P3
P8
P1
P'8
P'6
P'4
P'2
A
P'3
P'5
P'7
P'9



Le point P_{10} (vu ci-dessus en zoom de la figure précédente) a un couple de coordonnées qui est à peu près : $(0,24;0,03)$.
Sous forme de fraction simplifiée leur dénominateur est commun et vaut :
154476802108746166441951315019919837485664325669565431700026634898253202035277999
Le numérateur de l'abscisse est :
36875131794129999827197811565225474825492979968971970996283137471637224634055579
Et le numérateur de l'ordonnée est :
4373612677928697257861252602371390152816537558161613618621437993378423467772036

Le dénominateur comporte 81 chiffres et vaut à peu près 150 millions de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards de milliards, soit 1,5 fois le nombre d'atomes estimé dans l'univers visible.

La théorie (*cf. https ://mlzeng.com/an-interesting-equation.html*) établit que cette solution obtenue est la plus petite qui existe.

4 Conclusion

La conjecture que nous avions formulée initialement, après avoir testé un grand nombre de cas par ordinateur, s'est révélée fausse. Le contre exemple le plus simple est tellement grand qu'il était impossible à trouver par une exploration élémentaire. Il ressort de ces recherches qu'une situation assez simple à décrire mathématiquement peut conduire à une étude bien compliquée, et riche de notions.

La solution est venue en élargissant le domaine de définition de l'équation. Cela nous a donné un ensemble solution sur lequel nous avons pu travailler, et en extirper la solution recherchée.

Le recours à l'informatique pour implémenter des algorithmes est parfois la seule possibilité qui permet d'obtenir certains résultats du seul fait de la lourdeur des calculs à réaliser (numériques ou algébriques). Le langage *Python* a l'avantage de pouvoir manipuler en valeur exacte des nombres entiers très grands, par contre dès qu'il recourt à une valeur approchée l'erreur d'arrondi est tout de suite rédhibitoire pour notre étude.

Nous avons vu que la géométrie peut fournir un éclairage utile dans une situation uniquement algébrique. On y a vu une symétrie qui a permis de simplifier le problème. Cela a été l'occasion d'expérimenter, dans un cas simple, la technique bien utile du changement de repère.

L'étude s'arrête ici, elle est déjà un peu longue pour le format. Mais il semble naturel de regarder les points, et donc les triplets solution, que l'on obtient en considérant des droites autres que celles de la forme $(P_1P'_n)$. Par exemple $AP_3)$, (P_2P_3)... Cela permettrait de tester l'affirmation selon laquelle la solution trouvée est la plus petite. Le programme créé permet de le faire en peu de temps.

Une question sympathique aussi serait de chercher à déterminer combien de tests il faudrait faire avec l'algorithme du Listing 1 pour aboutir à la solution que nous avons trouvée, et ainsi évaluer le temps nécessaire à un ordinateur puissant pour l'obtenir.

ANNEXE

```
#####################################
#### PROGRAMMME #####
#####################################
from Fonctions import test1, test2, simpl, somme, diff, prod, quot,
    chgrep, droite, Prod1, Prod2, Fact1, Fact2, NeXT, triplet
# Les deux points de d part :
P1=((-1,11),(4,11))
P2=((-1,4),(11,4))
# Avec les noms des variables locales dans la boucle
M=P1 # immuable
N=P2 # it r
print(M,N)
n=3 # compteur de points
Trouve=False
while Trouve==False :
  # point suivant :
  R=NeXT(M,N)
  X,Y,Z=triplet(R)
  print('______________________________________________________ \n Le
   point P',n,' a pour coordonn es :',X/Z,' et ',Y/Z,'\n Le triplet
   associ  est :\n',X,'\n',Y,'\n',Z)
  test2(X,Y,Z)
  n=n+1
  # Seul le deuxi me point change
  N=R
  if X*Y*Z>0 :
    Trouve=True
    print('Ci-dessus la premi re solution au probl me initial.')
```

Listing 4 – ¨Programme principal

```
###########################################################
# Ensemble des fonctions appel es par le programme
###########################################################
# Fonctions math matiques
from math import *
# Utilis  uniquement pour simplifier une fraction en valeur exacte (
    aurait permis aussi les op rations    lmentaires   , mais c'est
    interessant de cr er ces fonctions    la main)
from fractions import *


def test1(x,y,z):
# Teste si un triplet (x,y,z) est solution de l' quation      partir de l
   ' quation   initiale
# probl me, entach  d'erreurs d'arrondi
  C=x/(y+z)+y/(x+z)+z/(x+y)
  print ('Le calcul donne : ',C)
```

```
def test2(x,y,z):
# Teste si un triplet (x,y,z) est solution de l' quation    partir de l' quation   sans d niminateur , permet le calcul en valeur exacte
  # Les sommes, pour simplifier l' criture   :
  s=x+y
  t=x+z
  u=y+z
 # Le membre de gauche de l'  galit
  g=x*s*t+y*s*u+z*t*u
  # Le membre de droite de l'  galit
  d=4*s*t*u
  print('Membre de gauche : ', g,'\nMembre de droite : ',d)
  if d == g :
    print ("Le triplet (",x,",",y,",",z,") est solution.")
  else :
    print ("Le triplet (",x,",",y,",",z,") n'est pas solution.")

def simpl(f):
  # utilise le module fractions.py pour simplifier en valeur exacte la fraction f
  an,ad=f
  F=Fraction(an,ad)
  An,Ad=F.numerator,F.denominator
  F=(An,Ad)
  return(F)


def somme(a,b):
  # additionne en valeur exacte les fractions a et b
  an,ad=a
  bn,bd=b
  sn=an*bd+bn*ad
  sd=ad*bd
  s=(sn,sd)
  s = simpl(s)
  return(s)

def diff(a,b):
  # soustrait en valeur exacte les fractions a et b
  an,ad=a
  bn,bd=b
  dn=an*bd-bn*ad
  dd=ad*bd
  d=(dn,dd)
  d = simpl(d)
  return(d)

def prod(a,b):
```

```
  # multipie en valeur exacte les fractions a et b
  an,ad=a
  bn,bd=b
  pn=an*bn
  pd=ad*bd
  p=(pn,pd)
  p = simpl(p)
  return(p)

def quot(a,b):
  # divise en valeur exacte les fractions a et b
  an,ad=a
  bn,bd=b
  qn=an*bd
  qd=ad*bn
  q=(qn,qd)
  q = simpl(q)
  return(q)


def chgrep(type,M):
  # changement de rep re :
  # Fournit les coordonn es d'un point...
  # type = 1 : ... dans le rep re (O,u,v)   partir de celles dans (O,i
   ,j)
  # type = 3 : ... dans le rep re (O,i,j)   partir de celles dans (O,u
   ,v)
  # attention, les conventions x,y,X,Y de l'article ne sont pas celles
   de cette fonction Python
  x,y=M
  xn,xd=x
  yn,yd=y
  if type==1:
    Xn,Xd=prod((1,2),somme(x,y))
    Yn,Yd=prod((1,2),diff(y,x))
  if type==2:
    Xn,Xd=diff(x,y)
    Yn,Yd=somme(x,y)
  X=(Xn,Xd)
  Y=(Yn,Yd)
  return((X,Y))

def droite(A,B):
  # Donne les coefficients de l' quation  de la droite (AB)
  xA,yA=A
  xB,yB=B
  xAn,xAd=xA
  yAn,yAd=yA
  xBn,xBd=xB
```

```
  yBn,yBd=yB
  ann,anD=diff(yB,yA)
  adn,add=diff(xB,xA)
  an=ann*add
  ad=anD*adn
  a=(an,ad)
  a=simpl(a)
  axA=prod(a,xA)
  b=diff(yA,axA)
  return(a,b)

def Prod1(P,Q):
  # Produit de polyn mes de degr  1
  aP,bP=P
  aQ,bQ=Q
  a=prod(aP,aQ)
  c=prod(bP,bQ)
  b=somme(prod(aP,bQ),prod(bP,aQ))
  return((a,b,c))

def Prod2(P,Q):
  # Produit d'un polyn mes de degr  2 et d'un polyn me de degr  1
  aP,bP,cP=P
  aQ,bQ=Q
  a=prod(aP,aQ)
  b=somme(prod(aP,bQ),prod(bP,aQ))
  c=somme(prod(bP,bQ),prod(cP,aQ))
  d=prod(cP,bQ)
  return((a,b,c,d))

def Fact1(p,PZ):
# factorisation du polyn me PZ de degr  3 par le polyn me X-p
# retourne le polyn me Q tel que (X-p)*Q=PZ
  a,b,c,d=PZ
  A=a
  B=somme(b,prod(A,p))
  C=somme(c,prod(B,p))
  D=somme(d,prod(C,p))
  if D[0]!=0:
    print('Le polyn me ',PZ,' n est pas factorisable par X -',p,".")
  return((A,B,C))

def Fact2(p,P2Z):
# factorisation du polyn me  P2Z de degr  2 par le polyn me X-p
# retourne le polyn me Q tel que (X-p)*Q=P2Z
  a,b,c=P2Z
  A=a
  B=somme(b,prod(A,p))
  C=somme(c,prod(B,p))
```

```
  if C[0]!=0:
    print('Le polyn me ',P2Z,' n est pas factorisable par X -',p,'.')
  return((A,B))


def NeXT(M,N):
# Obtention du point suivant
  # sym trique N'(appel  ici Np) de N
  xN,yN=N
  Np=(yN,xN)
# Changement de rep re :
  M=chgrep(1,M)
  XM=M[0]
  Np=chgrep(1,Np)
  XNp=Np[0]
  # Equation de la droite (MN) :
  MNp=droite(M,Np)
  # Membre de gauche de l'  galit   :
  PG=Prod2(Prod1(MNp,MNp),((12,1),(-1,1)))
  a,b,c,d=PG
  # Polyn me    annuler :
  PZ=(diff((4,1),a),diff((11,1),b),diff((6,1),c),diff((-1,1),d))
  # Premi re factorisation :
  PZ1=Fact1(XM,PZ)
  # Seconde factorisation :
  PZ2=Fact2(XNp,PZ1)
  a,b=PZ2
  XR=diff((0,1),quot(b,a))
  a,b=MNp
  YR=somme(prod(a,XR),b)
  R=(XR,YR)
  R=chgrep(2,R)
  return(R)

def triplet(M):
  # Donne le premier triplet associ     un point de (C) (fait l'hypoth se que les d nominateurs des deux coordonn es sont les m mes)
  x,y=M
  X,Z=x
  Y=y[0]
  return(X,Y,Z)
```

Listing 5 – Fonctions