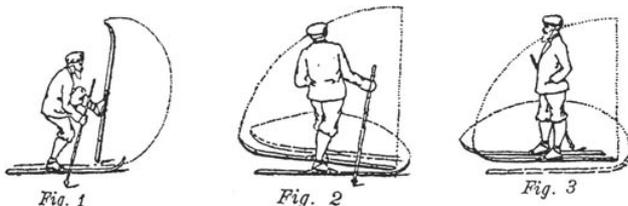


## Retournement d'une aiguille



Par LUC Martin et RUTH Tanguy élèves de seconde au lycée d'Altitude de Briançon  
 Chercheur : Camille PETIT – Université Joseph Fourier (Grenoble)  
 Enseignant : Hubert PROAL

### Sujet :

Nous avons le segment  $[AB]$  que l'on doit retourner (B en A et A en B) en restant dans le plan. Nous souhaitons que la surface balayée par le retournement soit minimale.

### Première méthode :

Nous réalisons la rotation de centre le milieu de  $[A_1B_1]$  et d'angle  $180^\circ$ . La surface balayée est alors celle d'un cercle de diamètre la taille de l'aiguille ( $l$ ) soit  $\pi \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{\pi l^2}{4}$  (figure 1). (1)

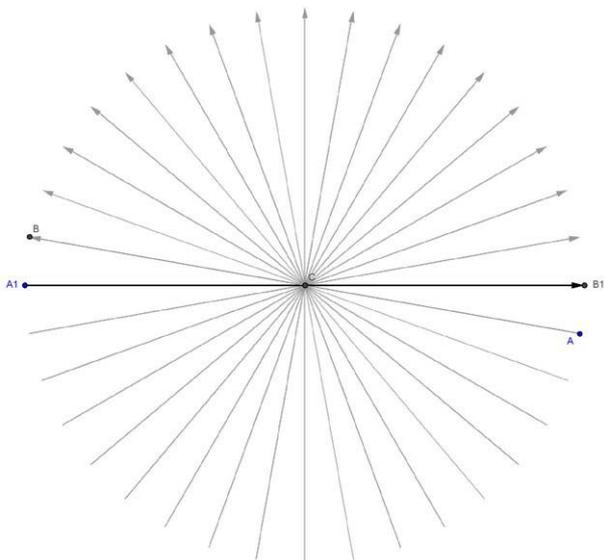


Figure 1

### Deuxième méthode :

Nous avons deux mouvements, la rotation de centre  $A_1$  et d'angle  $180^\circ$  puis la translation de vecteur  $\overrightarrow{A_1B_1}$ .

La surface balayée correspond à la surface du

demi-cercle de rayon  $l$ ,  $\frac{\pi l^2}{2}$  et c'est tout car la translation n'apporte pas de surface (figure 2).

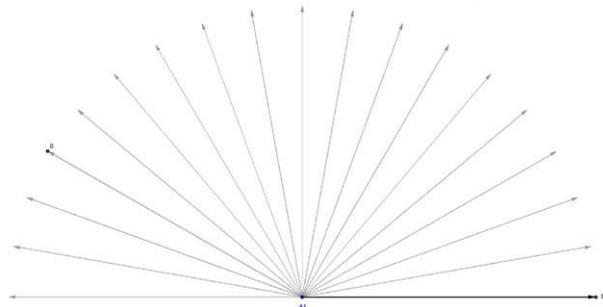


Figure 2

Lors de nos recherches au lycée nous avons proposé d'autres solutions que nous vous présenterons plus loin.

### Quatrième méthode, proposée par notre chercheur :

Nous faisons six mouvements (figure 3) :

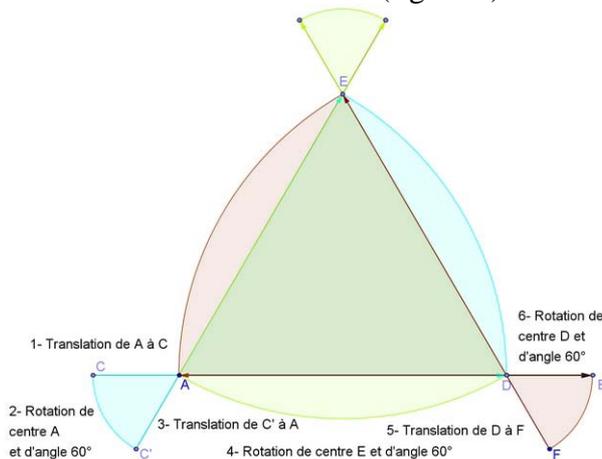


Figure 3 : Les six déplacements qui permettent de retourner  $[AB]$

Si on suppose que la longueur de départ est  $l(=AB)$  et que la longueur  $AC$  fait  $x$ .

La surface alors balayée par l'aiguille est de

$$A(x, l) = 3 \times \frac{\pi \times (l-x)^2}{6} + 3 \times \frac{\pi \times x^2}{6} - h \times (l-x)$$

$$\text{où } h = \sqrt{(l-x)^2 - \frac{(l-x)^2}{4}} = (l-x) \times \sqrt{\frac{3}{4}}$$

cette surface se compose de trois tiers de demi-cercle de rayon  $x$  et d'un triangle de Reuleaux de taille  $x-l$ . (2)

Remarque : pour  $x=0$  on obtient le triangle de Reuleaux.

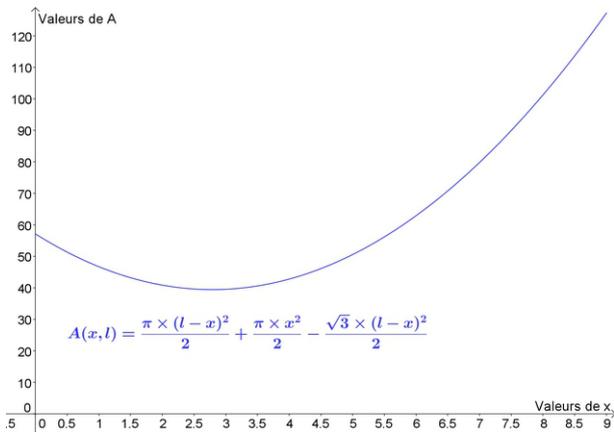


Figure 4 : Représentation graphique de l'aire balayée en fonction du déplacement  $x$ .

Si on la trace sur Géogébra pour  $l=9$  on obtient une fonction qui a un minimum. Avec l'aide de notre enseignant et de Géogébra, nous calculons la dérivée de la fonction et regardons où elle s'annule (figure 5).

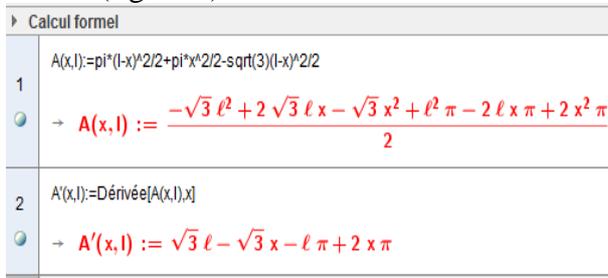


Figure 5 : Extrait du calcul de la dérivée de la fonction  $A(x, l)$

Nous trouvons que son minimum est pour  $x = \frac{l(\pi - \sqrt{3})}{2\pi - \sqrt{3}}$

Si nous comparons graphiquement les solutions actuelles, nous obtenons (pour  $l=9$ ) :

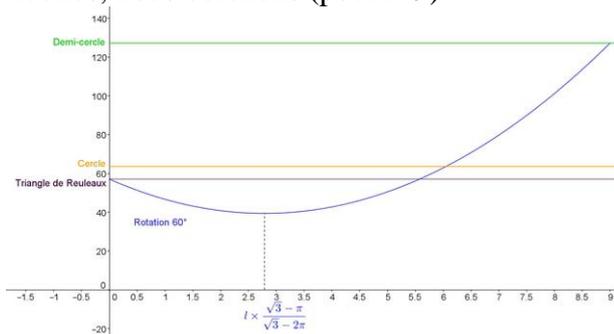


Figure 6 : Représentation des surfaces balayées en fonction de  $x$

Nous avons voulu savoir ce qui se passe si nous ne faisons pas une rotation de  $60^\circ$  mais de  $90^\circ$  ou de  $30^\circ$ .

Nous avons alors six mouvements dont deux rotations de  $90^\circ$  (figure 7). L'aiguille est à l'envers mais au mauvais endroit.

Si nous calculons l'aire en fonction du déplacement  $x$  et de la taille de l'aiguille, nous obtenons :

$A(x, l) = \frac{\pi x^2}{2} + l \times (l - x)$  cette formule est moins avantageuse que celle à  $60^\circ$ .

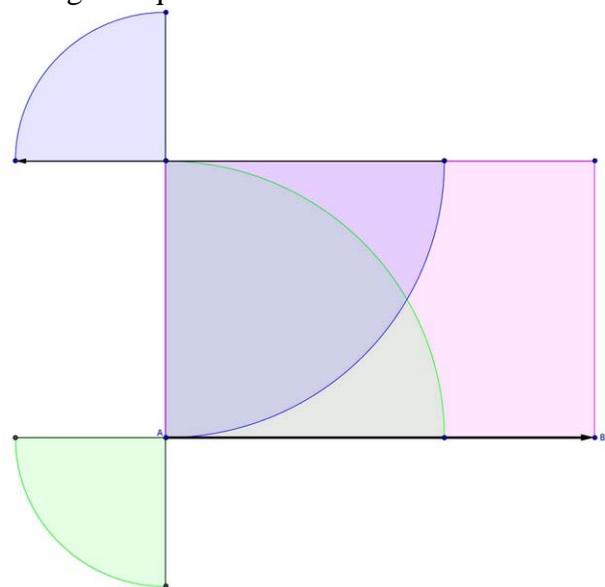


Figure 7 : Six déplacements dont deux rotations de  $90^\circ$

Pour  $30^\circ$ , nous avons 14 déplacements (figure 8). Nous ne sommes pas arrivés à obtenir une formule qui calcule (ou majore) cette surface.

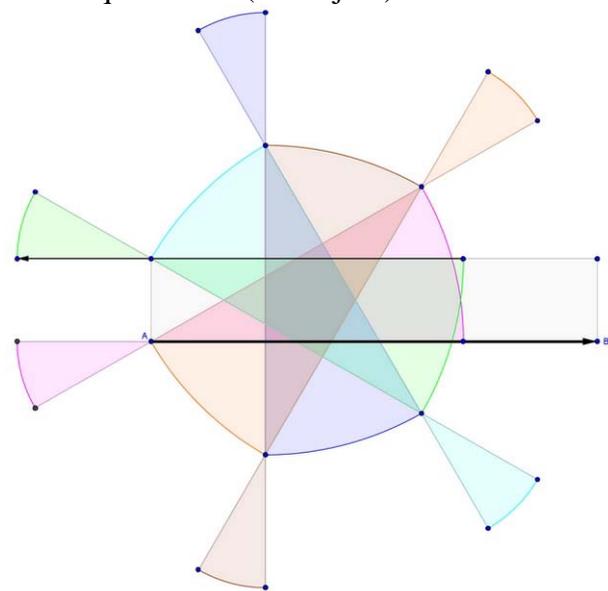


Figure 8 : 14 déplacements dont 6 rotations de  $30^\circ$

Lors d'une vidéo-conférence avec notre chercheur, il nous a montré comment faire pour que les translations aient une aire aussi petite que l'on veut (figure 9).

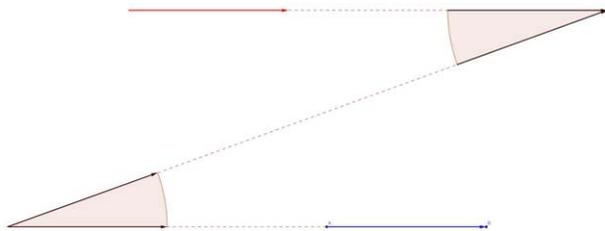


Figure 9

Le vecteur bleu a été déplacé en rouge en faisant seulement deux sections. Si nous allons suffisamment loin, ces sections peuvent être aussi petites que l'on veut.

Avec cette remarque, l'aire du retournement de 90° devient la figure 10.

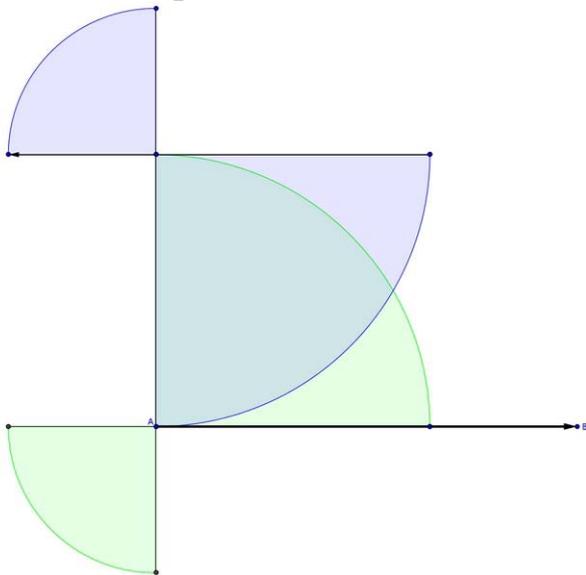
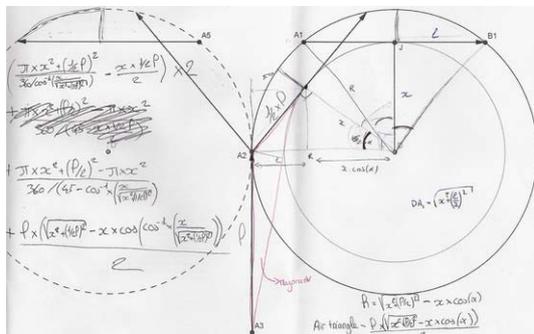


Figure 10

Nous n'avons pas trouvé de formules dans ce cas.

Nos recherches se sont poursuivies sur une méthode que nous avons élaborée assez tôt dans l'année mais que nous avons laissée de côté par la suite.



Extrait du cahier de recherche des élèves

### Troisième méthode : (3)

Retournement avec 5 mouvements (figure 11) :

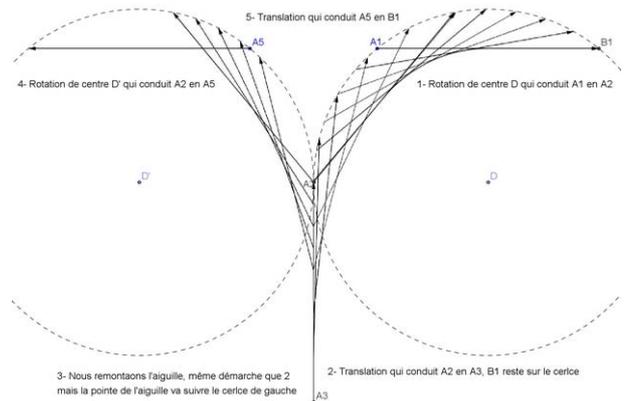


Figure 11 : Retournement en 5 déplacements

La surface balayée est symétrique, il nous faut d'abord calculer la surface bleue (figure 12) ou en avoir un encadrement en fonction de la taille de l'aiguille  $l$  et de la position du point  $D$  ( $x=DJ$ ), puis la surface orange (figure 13).

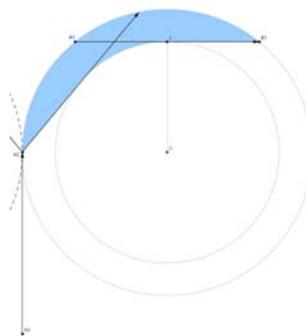


Figure 12

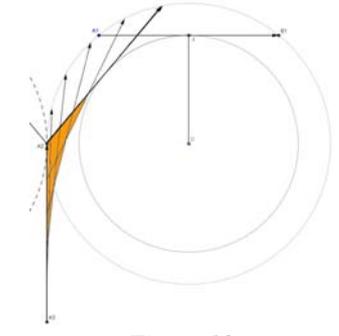


Figure 13

Là aussi, le calcul de la surface balayée fut laborieux. Nous avons trouvé la formule exacte pour la partie bleue  $\frac{\beta}{2}(R^2 - x^2) + \alpha R^2 - \frac{lx}{2}$  (figure 14) mais pas pour la partie orange, que nous avons majorée par la surface du triangle rouge  $\frac{h \times l}{2}$  (figure 15).

Ce qui donne au final la fonction

$$f_{3.1}(x, l) = 2 \times \left( \frac{\beta}{2}(R^2 - x^2) + \alpha R^2 - \frac{lx}{2} + \frac{h \times l}{2} \right)$$

$$f_{3.1}(x, l) = \left( \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{l}{2x}\right) \right) \frac{l^2}{4}$$

$$+ 2 \times \arctan\left(\frac{l}{2x}\right) \times \left( \frac{l^2}{4} + x^2 \right) - lx$$

$$+ \left( \sqrt{\frac{l^2}{4} + x^2} - x \cos\left(\arctan\left(\frac{l}{2x}\right)\right) \right) \times l$$

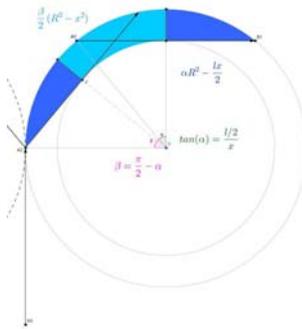


Figure 14

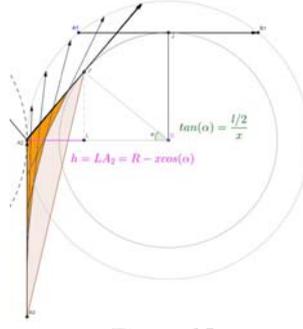


Figure 15

Nous avons proposé deux autres solutions similaires.

Nous réalisons deux rotations de 90° puis une

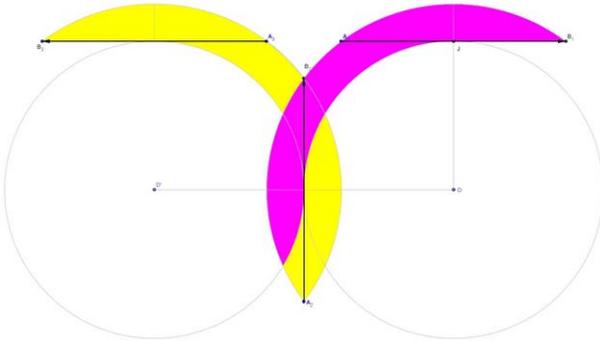


Figure 16

translation (figure 16). L'aire jaune et l'aire mauve sont égales.

En nous aidant de la figure 17, nous obtenons une magnifique fonction  $f_{3.2}(x, l)$  que nous avons tracée (figure 19).

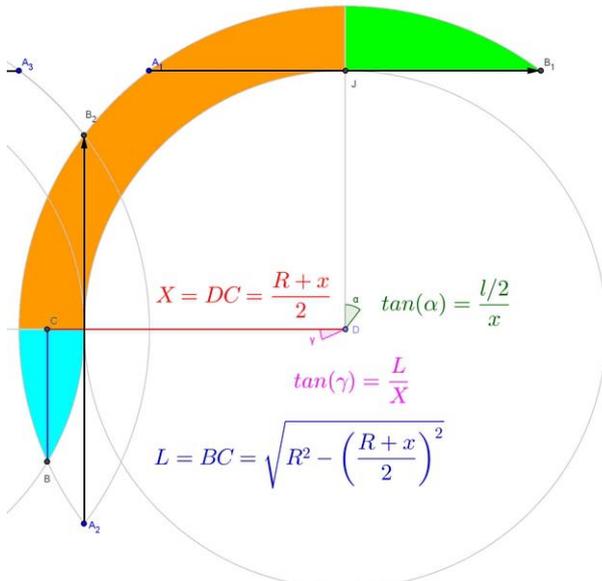


Figure 17

$$ORANGE = \frac{\pi R^2 - \pi x^2}{4} = \frac{\pi l^2}{16}$$

$$VERT = \frac{\alpha R^2}{2} - \frac{x l}{4} = \frac{\arctan\left(\frac{l}{2x}\right) \left( \left(\frac{l}{2}\right)^2 + x^2 \right)}{2} - \frac{x l}{4}$$

$$BLEU = \gamma R^2 - L X \text{ où } X = \frac{R+x}{2},$$

$$L = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R+x}{2}\right)^2} \text{ et } \tan(\gamma) = \frac{L}{X}$$

Enfin, on peut faire le retournement comme ci-dessous (figure 18) puis la translation, comme la figure 9, qui a une surface nulle.

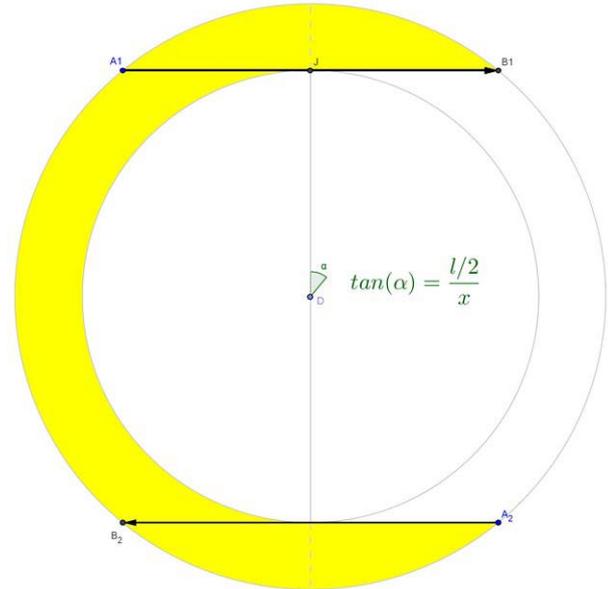


Figure 18

Dans ce dernier cas, la formule sera

$$f_{3.3}(x, l) = \frac{\pi R^2}{2} - \frac{\pi x^2}{2} + \alpha R^2 - \frac{l x}{2}$$

$$f_{3.3}(x, l) = \frac{\pi l^2}{8} + \arctan\left(\frac{l}{2x}\right) \times \left( x^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right) - \frac{l \times x}{2}$$

Si nous traçons nos trois aires (pour les trois derniers cas), nous arrivons à :

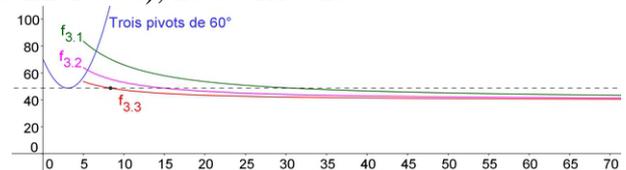


Figure 19 : Représentation des trois fonctions

Les trois méthodes sont plus performantes que la solution par trois rotations de 60°. Nos formules semblent tendre vers une valeur.

Lors du congrès *MATH.en.JEANS* de Marseille,

avec l'aide de notre enseignant, nous sommes arrivés à montrer que ces trois formules avaient la même limite  $\frac{\pi l^2}{8}$

$$f_{3.3}(x,l) = \pi l^2 / 8 + (l/(2x)) * (x^2 + (l/2)^2) - l * x / 2$$

$$\rightarrow f_{3.3} = \frac{x l^2 \pi + l^3}{8 x}$$

Figure 20

En effet, quand  $x$  est grand,  $\frac{l}{2x}$  est petit. Avec Géogébra on peut remarquer que  $\text{Arctan}(t)$  et  $f(t)=t$  sont similaires pour  $t$  petit (figure 22). Autrement dit, pour  $x$  grand nous pouvons remplacer  $\arctan\left(\frac{l}{2x}\right)$  par  $\frac{l}{2x}$

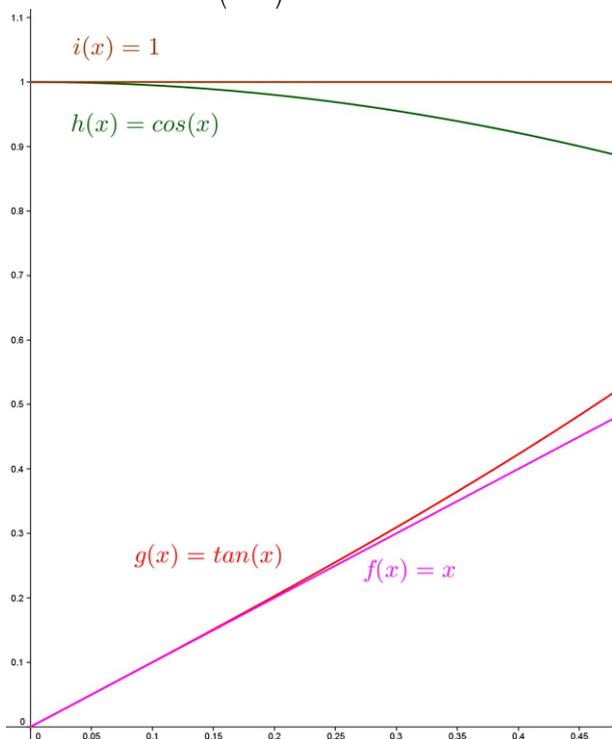


Figure 21

**Cinquième méthode :**

Lors du Salon de la culture et des jeux mathématiques, début juin, nous avons présenté nos résultats à un chercheur qui nous a proposé une autre méthode. Nous pouvons considérer que cette dernière est une espèce de mélange des deux méthodes précédentes. Nous sommes arrivés à démontrer que la limite était toujours  $\frac{\pi l^2}{8}$ , même si nous faisons  $n$  rotations de  $\frac{\pi}{n}$ .

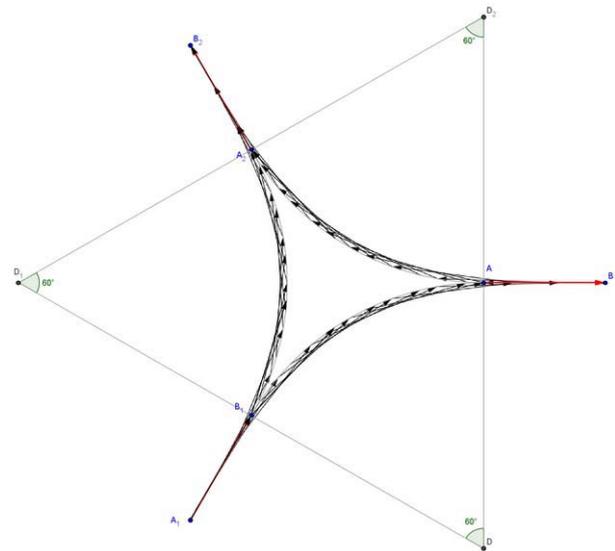


Figure 22 : trois "glissements-rotations" de 60°

D'après notre dessin (figure 22), il nous semble que l'on peut négliger les points, et dans ce cas la surface balayée correspond alors aux trois morceaux de couronnes (à l'intérieur du triangle) qui valent  $3 \times \left(\frac{\pi}{6}(R^2 - x^2)\right) = \frac{\pi l^2}{8}$ .



Rencontre avec le chercheur 21/01/2013

**Notes de l'édition :**

- (1) Dans cette figure et les suivantes, les points A1 et B1 correspondent aux premières positions des points A et B.
- (2) Le triangle de Reuleaux est la partie centrale de la figure, constituée d'un triangle équilatéral et d'arcs de cercle centrés sur les sommets du triangle. On obtient son aire en calculant l'aire des trois tiers de demi-cercles et en retranchant deux fois l'aire du triangle central.
- (3) Pour cette méthode, un point D sur la médiatrice de AB est fixé. Le point J mentionné un peu plus loin est le milieu de AB. Les autres notations sont données dans la figure 14.