

la réussite africaine

par Julien Couzinou, Christophe Mensal, Vincent Rezenthe, Julien Bourret, Benjamin Darras, Faustine Delacotte, Alexandre Pichon, Benjamin Thevenin, élèves de 5ème du collège Pierre de Ronsard, de Montmorency et du collège l'Ardillière de Nézant, de Saint Brice sous Forêt

enseignants : Vincente Bartoli, Yann Bourit, Catherine Mandonnet

chercheur : Pierre Duchet, CNRS

Commentaire du chercheur :

Suite à ce problème, Daniel Loeb a voulu savoir la loi reliant le nombre de billes au nombre de cases utilisées. Cette loi, surprise, fait intervenir les fonctions hypergéométriques et le nombre π ; ce résultat a donné lieu à une publication dans une revue spécialisée (Pour le texte, contacter D. Loeb, laboratoire LABRI, Université Bordeaux I, 351 Cours de la Libération 33504 Talence Cedex).

Dans le jeu de la réussite africaine nous montrons :

— comment réussir lorsque la position initiale des pions le permet,

— qu'il existe une et une seule solution pour n pions.

Introduction

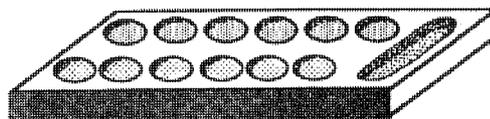
Au début de l'année 1992, nous nous sommes inscrits au club MATH.en.JEANS pour travailler sur la “**Réussite africaine**”.

Ce jeu est une variante du jeu africain l'Awele.

L'Awele se joue à deux et la réussite africaine à un seul joueur.

Composition du jeu

Le jeu se compose d'une planche creusée de trous, d'un “grenier” (une réserve creusée dans le bois), situé à l'extrémité du jeu, et d'une cinquantaine de billes (en fait ce sont des petits coquillages).



But du jeu

Le but du jeu consiste à transférer en plusieurs coups toutes les billes dans le grenier sans qu'aucune bille ne reste sur le jeu ou dans la main.

Règle du jeu

Des billes sont disposées dans des cases. On doit vider chaque case, pour cela il faut prendre toutes les billes d'un seul coup et les répartir une par une dans chaque case qui la sépare du grenier, en mettant la dernière bille dans le grenier.

Notation. Vocabulaire et exemples.

Notation

Pour notre étude nous jouons sur un vrai jeu. Nous nous sommes vite rendu compte, quand nous sommes arrivés à un nombre important de billes qu'il fallait changer de méthode pour poursuivre notre recherche. Nous avons donc tracé des cases sur des feuilles de papier. Nous les avons numérotées en chiffres romains à partir du grenier noté G et nous avons remplacé les billes par des croix puis par leur nombre en chiffres arabes.

Vocabulaire

Case pleine :

C'est une case qui contient autant de billes que son numéro.

Exemple : case IV, contient 4 billes, c'est une case pleine.

Case occupée :

C'est une case qui contient un nombre insuffisant, mais non nul, de billes pour aller jusqu'au grenier.

Exemple : case IV, contient 3 billes, c'est une case occupée.

Réussite :

C'est le mot qui définit une partie gagnée. C'est-à-dire qu'il n'y a plus de billes sur le jeu et qu'elles sont toutes dans le grenier.

Position gagnante ou solution :

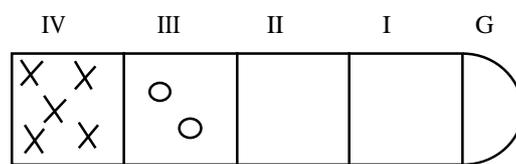
C'est une disposition de billes qui permet une réussite.

Position perdante :

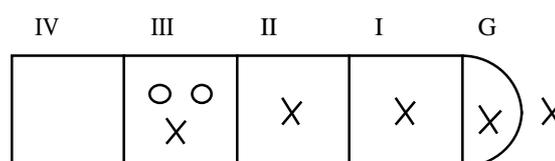
C'est une disposition de billes qui mène nécessairement à l'échec.

Exemples : Avec 7 pions.

Position perdante

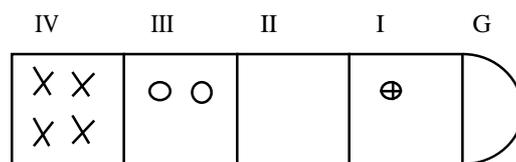


On vide IV.

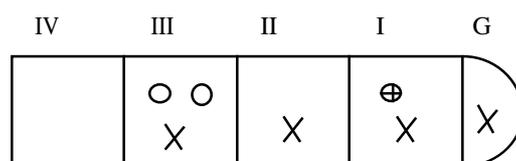


Il reste un pion dans la main car dans IV il y a un pion de trop.

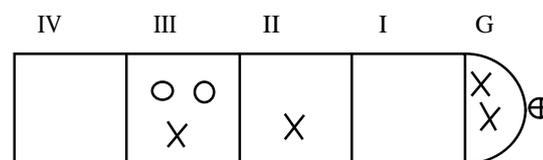
Position gagnante et échec



On vide IV dans III, II, I et G.

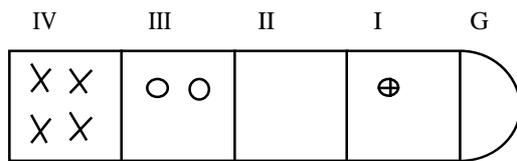


On vide I.

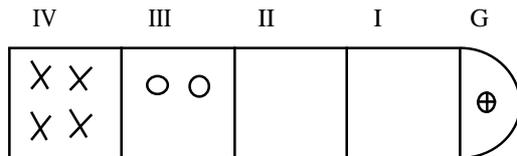


Il reste un pion dans la main.

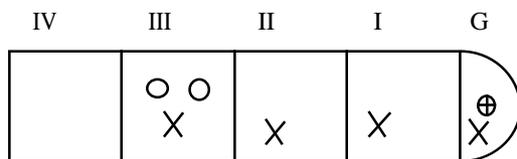
Position gagnante et réussite



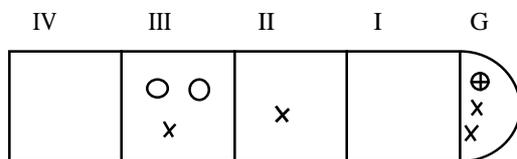
On vide I dans G.



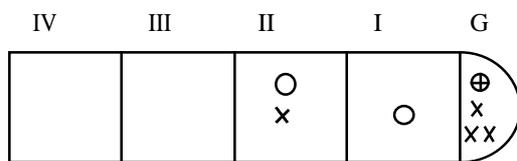
On vide IV dans III, II, I et G.



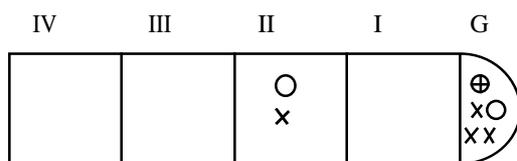
On vide I.



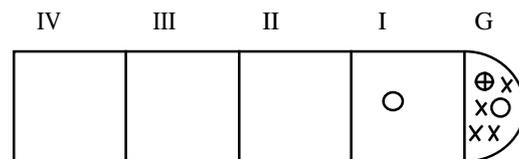
On vide III.



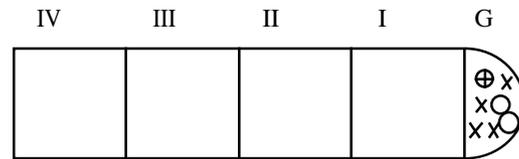
On vide I.



On vide II.



On vide I.



La partie est gagnée.

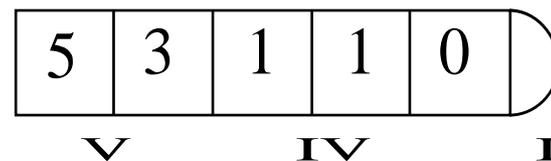
Positions gagnantes et réussites possibles

Comment vider les cases pour réussir une partie

Pour réussir une partie, il y a une règle fondamentale :

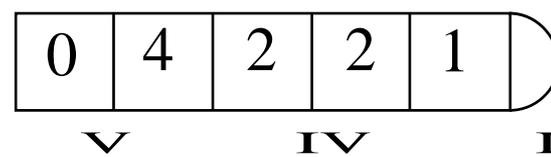
☞ Il faut vider la première case pleine la plus proche du grenier. Si on en vide une autre on surcharge une case.

Exemple :



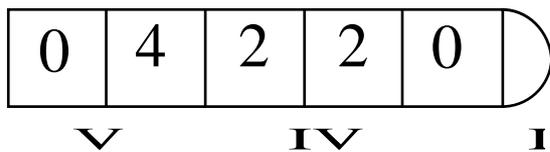
Ici la case la pleine la plus proche du grenier est la case V.

On la vide. On obtient :



Maintenant, la case pleine la plus proche du grenier est la case I.

On obtient donc :



Vidons la case II.

Comment trouver toutes les positions gagnantes ?

Conjecture :

Pour un nombre quelconque de billes donné il existe une position gagnante unique.

Comment trouver une solution à n+1 billes (mère) quand on connaît une solution à n billes (fille) ?

On s'est aperçu que lorsque l'on a une solution à 6 billes on peut trouver une solution à 7 billes. Si on a une solution à 7 billes on pourra en trouver une à 8 billes.

Règle 1 :

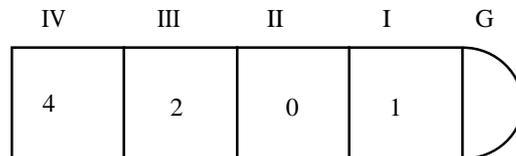
D'une façon générale, lorsque l'on a une solution à n billes (fille) on peut trouver une solution à n+1 billes (mère) de la façon suivante :

- On observe les cases une par une en partant du grenier et on prend la première case vide que l'on trouve,
- on la remplit d'autant de billes que son numéro de case (exemple : pour la case II on met 2 billes),
- puis on retire une bille à chacune des cases qui la séparent du grenier.

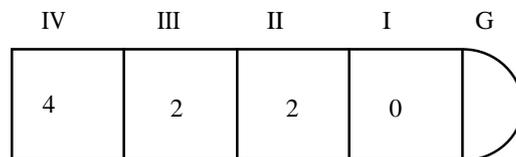
La solution obtenue (mère) est unique.

1^{er} exemple :

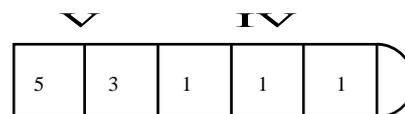
Imaginons que la fille à 7 billes. [NDLC : et le garçon ?]



Pour trouver la mère on rajoute 2 billes dans la case II, puis on enlève une bille aux cases qui la séparent du grenier, il n'y en a qu'une, c'est la case I.

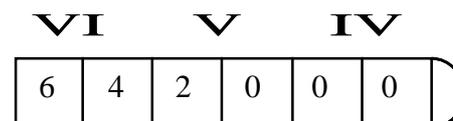
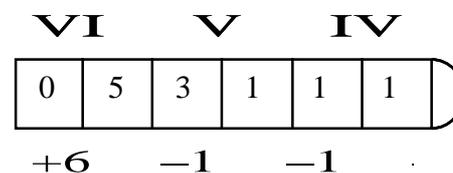


2^{ème} exemple :



Maintenant la première case vide est la 6^{ème} case.

On applique la règle précédente.



Si je connais une solution à $n+1$ billes (mère), comment trouver une solution à n billes (fille) ?

	X IX VIII VII VI V						
36 billes $n + 1$	10-8-6-4-8-5-1-0-0-(
	<table style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">-5</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="border-right: 1px solid black; padding: 0 5px;">+1</td> <td style="padding: 0 5px;">+1</td> </tr> </table>	-5	+1	+1	+1	+1	
-5	+1	+1	+1	+1			
35 billes n	10-8-6-4-2-0-2-1-1-1						

La case V dans la solution à 36 billes est la case pleine la plus proche du grenier, donc ce sera la case vide la plus proche du grenier dans la solution à 35 billes.

Règle 2 :

Connaissant une solution à $n+1$ billes (mère) on peut trouver une solution à n billes (fille) de la façon suivante :

- On vide la case pleine la plus proche du grenier, et ...
- on ajoute une bille dans chacune des cases qui la séparent du grenier.

La solution trouvée est unique.

[NDLC : la solution unique est trouvée ?]

Avec un nombre limité de points il n'y a qu'une seule solution possible.

