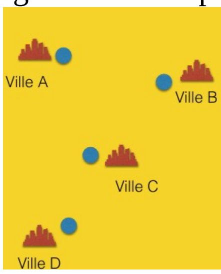
Atelier MATh.en.JEAN 2020-2021 Routes économiques

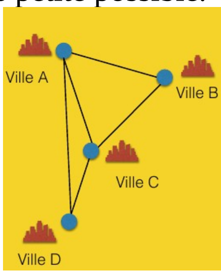
Nélia SOUCHON et Rouguiatou DEME (3e B)

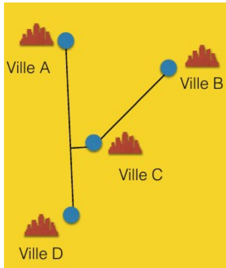
1 Description

On dispose de villes réparties sur une carte mais ces villes ne sont pas reliées par des routes. On souhaite relier les villes avec des routes en consommant la quantité minimale de matériau possible, sans qu'aucune ville ne reste isolée.

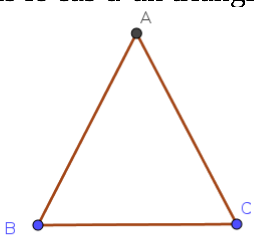
Chaque ville va être représentée par un point du plan et chaque route par un segment. On souhaite que la longueur totale de tous les segments soit la plus petite possible.



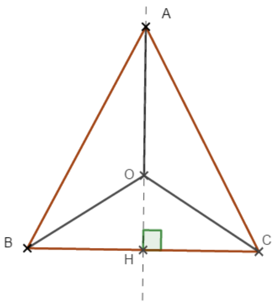




On a adapté le problème en le représentant dans le cas d'un triangle équilatéral formé par trois villes :



2 Étude du cas du triangle équilatéral



Nous avons organisé notre triangle *ABC* tel que : *[AH]* est la hauteur issue de *H*, et le centre est noté *O*. Tout d'abord nous allons calculer la longueur *AH* qui est la hauteur du triangle *ABC*. On note O l'intersection des hauteurs.

On suppose pour simplifier les calculs que la distance entre deux villes est de 1 km. Cela signifie que $AB = AC = BC = 1\ km$.

<u>1re étape :</u> Calcul de la longueur *AH* :

Nous allons appliquer le théorème de Pythagore :

$$AB^2 = AH^2 + BH^2$$
$$1^2 = AH^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$AH^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$AH^2 = 1 - \frac{1}{4}$$
$$AH^2 = \frac{3}{4}$$
$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} km$$

<u>2e étape:</u> Calcul de l'aire du triangle *ABC*

$$A(BOC) = A(ABC) \div 3$$
$$A(ABC) = \frac{BC \times AH}{2}$$
$$A(ABC) = \frac{1 \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}$$
$$A(ABC) = \frac{\sqrt{3}}{4}$$
$$A(BOC) = \frac{\sqrt{3}}{4} \div 3$$
$$A(BOC) = \frac{\sqrt{3}}{12}$$

<u>3e étape :</u> Calcul de la longueur *OH*

$$A(BOC) = \frac{BC \times OH}{2}$$
$$\frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1 \times OH}{2}$$
$$OH = \frac{\sqrt{3}}{12} \times 2$$
$$OH = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

Pour la longueur *AO* nous allons procéder a une soustraction des longueurs *AH* et *OH*.

$$AO = AH - OH$$
$$AO = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$AO = \sqrt{3}$$

On en déduit que la longueur *AO* fait $\sqrt{3}$.

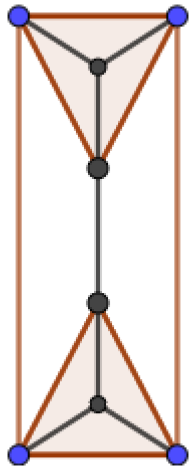
Enfin, nous additionnons les longueurs *AO*, *BO* et *CO* pour voir la longueur totale des routes.

$$AO+BO+CO=\sqrt{3}+\sqrt{3}+\sqrt{3}=3\sqrt{3}$$

Nous avons donc calcula la longueur totale de la route utilisée, avec un chemin qui passe par le point *O*, centre du triangle. Nous n'avons pas justifié pourquoi ce chemin est effectivement le plus court, mais nous avons effectué des simulations Geogebra qui permettent de le tester numériquement.

3 Cas du rectangle

Dans le cas d'un rectangle contenant deux triangles équilatéraux identiques qui ne se chevauchent pas, la route la plus économique consiste à relier les centres des triangles équilatéraux par un segment :



4 Conclusion

Il resterait encore beaucoup à étudier sur ce problème, même dans des cas très simples.

- Pour le triangle équilatéral, on peut écrire les calculs dans le cas générale d'une longueur quelconque.
- Il faudrait démontrer que la route passant par le centre *O* est vraiment la plus économique.
- Pour les rectangles les plus aplatis, la solution proposée ne fonctionne pas :