

Saute-Moutons

Années 2013-2014

Elèves de 4^{ème} : Da Costa Elsa, Guillemin Crystal, Le Gall Titouan, Raoul Hugo.

Etablissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).

Enseignants : Claudie ASSELAIN, Florence FERRY et Nicolas SEGARRA.

Chercheur : Céline Abraham.

Sujet :

Sur un chemin de montagne étroit où on ne peut pas se croiser, un troupeau de n moutons noirs arrive en face d'un troupeau de n moutons blancs. Les bergers, un peu endormis, les laissent avancer jusqu'à ce qu'il ne reste qu'une place vide entre les deux troupeaux. Les moutons ne savent pas reculer, heureusement, ils savent sauter les uns par dessus les autres.

Comment faire pour que les n moutons noirs prennent la place des n moutons blancs et inversement ?

Combien de déplacements faudra-t-il faire ?

Nos résultats : nous avons trouvé comment réussir le jeu, quel que soit le nombre de moutons dans chaque troupeau, avec une suite d'avancées et de sauts suivant les couleurs.

Conjecture : ce déplacement des moutons paraît unique.

Dans toute la suite de l'article, on représentera les moutons noirs par une croix noire et les moutons blancs par une croix blanche. On notera n le nombre de moutons de chaque couleur ; les lettres A et S signifient le type de déplacement fait par les moutons, A signifie avancées et S sauts. Quant aux lettres B et N, ce sont les couleurs des moutons qui effectuent l'action. B : blanc et N : noir.

1 – Étude pour $n = 2$

Nous avons schématisé les déplacements d'une colonne à l'autre, dans le tableau suivant :

X	X	X	X	X		X	X	X
X		X	X	X	X		X	X
	X	X	X		X	X	X	
X	X		X	X	X	X		X
X	X	X		X	X	X	X	X

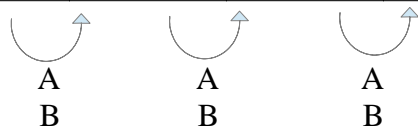
A S A S S A S A
 B N N B B N N B

Dans cette situation, nous avons réussi à inverser la place des moutons.

Total des déplacements : 4 sauts + 4 avancées = 8 déplacements

2 – Étude pour $n = 3$

X	X	X	X
X	X	X	X
X	X	X	X
	X	X	X
X		X	X
X	X		X
X	X	X	

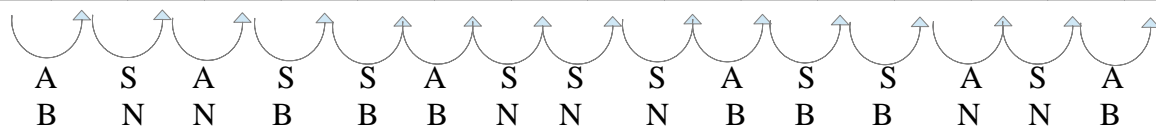


Dans cet exemple, nous nous retrouvons bloqués puisque les moutons ne savent pas reculer.

En fait, si deux moutons de même couleur se trouvent côte à côte avant la fin (hormis les moutons de départ), nous sommes sûrs de ne pas arriver à la situation finale.

Nous allons essayer un autre type de déplacement pour réussir à échanger les places de nos deux troupeaux.

X	X	X	X	X	x	X	X	X		X	X	X	X	X	X
X	X	X		X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X
X	X		X	X	X	X	X		X	X	X	X	X		X
	X	X	X		X	X	X	X	X	X		X	X	X	
X		X	X	X	X	X		X	X	X	X	X		X	X
X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X		X	X	X
X	X	X	X	X	X		X	X	X	X	X	X	X	X	X



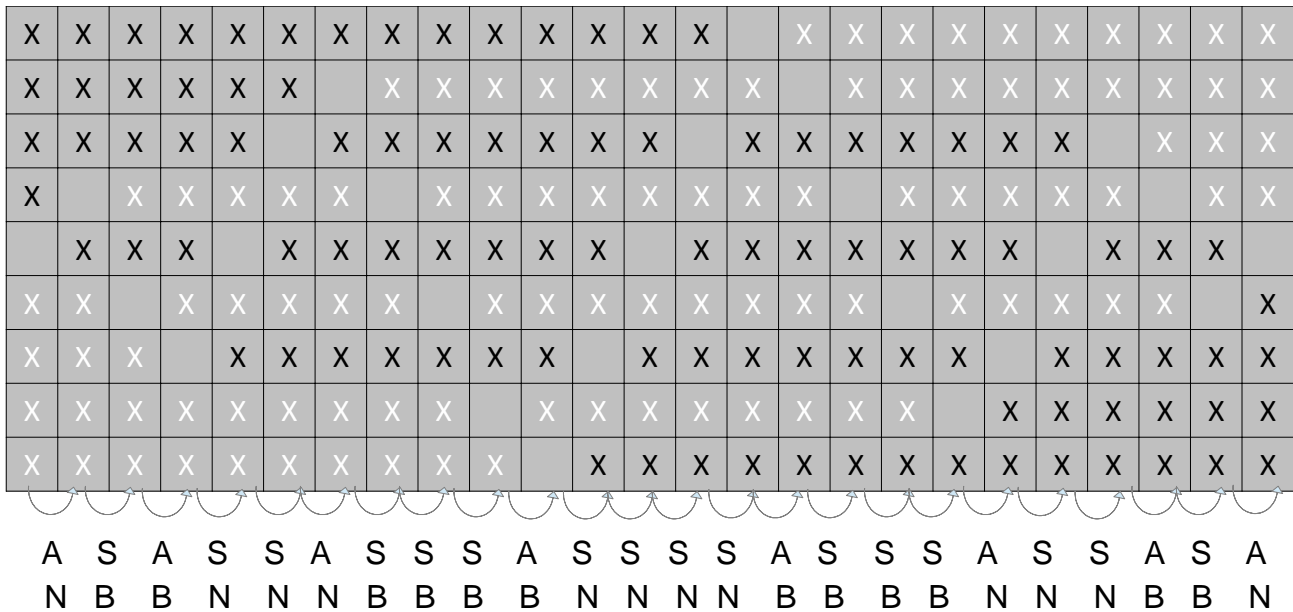
Nous avons réussi à inverser la place des moutons.

Total des déplacements : 9 sauts + 6 avancées = 15 déplacements

Nous avons commencé à voir une certaine symétrie dans les A et S ainsi que dans les B et N.

Si nous ne voulons pas être bloqués avant la fin, nous n'avons pas le choix quand nous déplaçons les moutons.

3 – Étude pour $n = 4$



Total des déplacements : 16 sauts + 8 avancées = 24 déplacements.

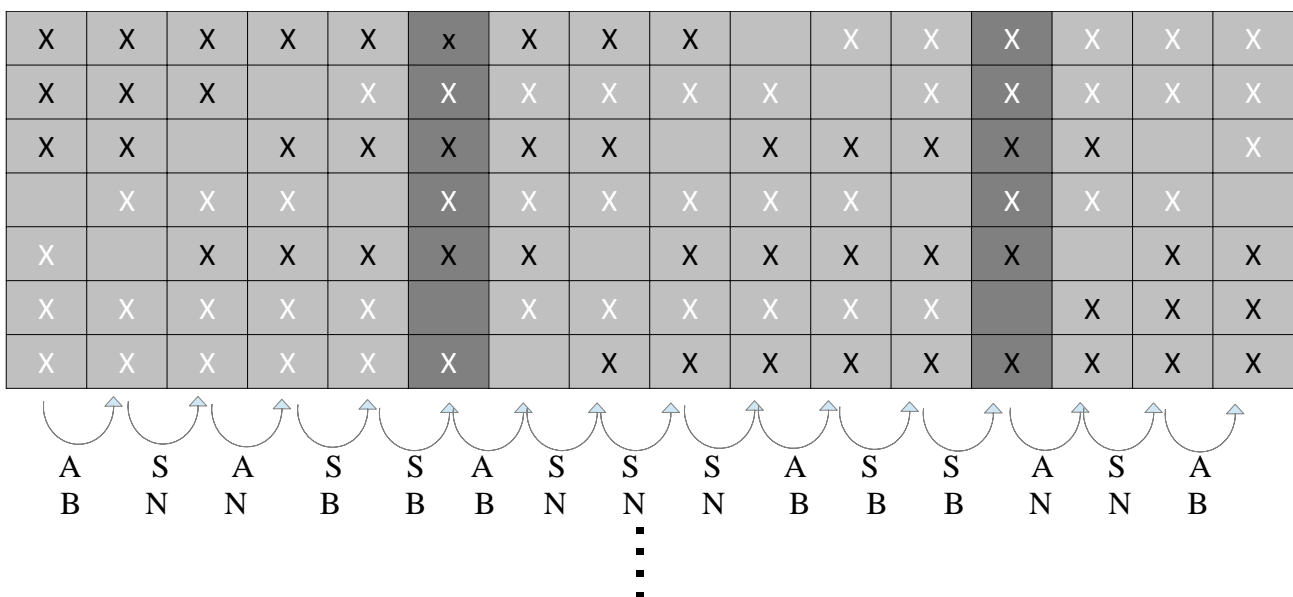
4 - Conjecture

Nous remarquons que le nombre de sauts est égal au nombre de moutons n d'une même couleur élevé au carré : n^2 . Pour trouver le nombre d'avancées il faut multiplier le nombre de moutons n par 2. Finalement, on ajoute le nombre de sauts et d'avancées pour trouver le nombre final de déplacements.

On peut donc conjecturer que le nombre de déplacements est égal à : $n^2 + 2n$.

Explication

On veut passer de 2 à 3 moutons. On prend $n = 3$.



Avant la sixième colonne, les deux moutons des extrémités n'ont pas bougé. Entre la sixième et la

treizième colonne, on échange les deux moutons des extrémités tout en revenant à la situation de la sixième colonne. A partir de la quatorzième colonne, les moutons des extrémités ne bougent plus. Avant la sixième colonne et après la treizième, on fait les $n^2 + 2n$ déplacements du cas précédent ($n = 2$). Entre les deux colonnes, on rajoute 2 avancées et 5 sauts ($5 = 2n + 1$, pour $n = 2$).

Dans le tableau correspondant à $n = 4$, observons comment on passe de 3 à 4 moutons : Jusqu'à la dixième colonne, les deux moutons des extrémités n'ont pas bougé. Entre la onzième et la dix-neuvième colonne, on échange les deux moutons des extrémités tout en revenant à la situation de la dixième. A partir de la dix-neuvième colonne, les moutons des extrémités ne bougent plus.

Avant la dixième colonne et après la dix-neuvième, on fait les $n^2 + 2n$ déplacements du cas précédent ($n = 3$). Entre les deux colonnes, on rajoute 2 avancées et 7 sauts ($7 = 2n + 1$, pour $n = 3$).

Pour passer de n à $n + 1$ moutons :

- Déplacements pour n moutons : $n^2 + 2n$
- Déplacements du mouton supplémentaire : 2 avancées et $2n + 1$ sauts.

Ce qui nous fait au total : $n^2 + 2n + 2n + 1 + 2$ déplacements.

$n^2 + 2n + 2n + 1 + 2 = n^2 + 2n + 1 + 2n + 2 = (n + 1)^2 + 2(n + 1)$. On retrouve bien notre résultat pour $n + 1$ moutons.

4 - Technique pour réussir à échanger nos deux troupeaux de moutons.

Nous avons remarqué un ordre particulier pour les sauts/avancées et pour la couleur des moutons.

Sauts/avancées :

$n = 2$: A S A SS A S A

$n = 3$: A S A SS A SSS A SS A S A

$n = 4$: A S A SS A SSS A SSSS A SSS A SS A S A

Pour n moutons :

A S A SS A SSS A ... A S...S A ... A SSS A SS A S A


 $n S$

Noirs/blancs :

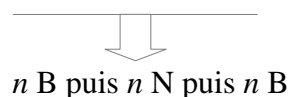
$n = 2$: N BB NN BB N

$n = 3$: N BB NNN BBB NNN BB N

$n = 4$: N BB NNN BBBB NNNN BBBB NNN BB N

Pour n moutons :

N BB NNN ... B...B N...N B...B ... NNN BB N


 $n B$ puis $n N$ puis $n B$

En utilisant cet ordre de A S et de N B, on est capable de réussir rapidement n'importe quel jeu. De plus, nous n'avons pas trouvé d'autres déplacements possibles pour réussir le jeu.

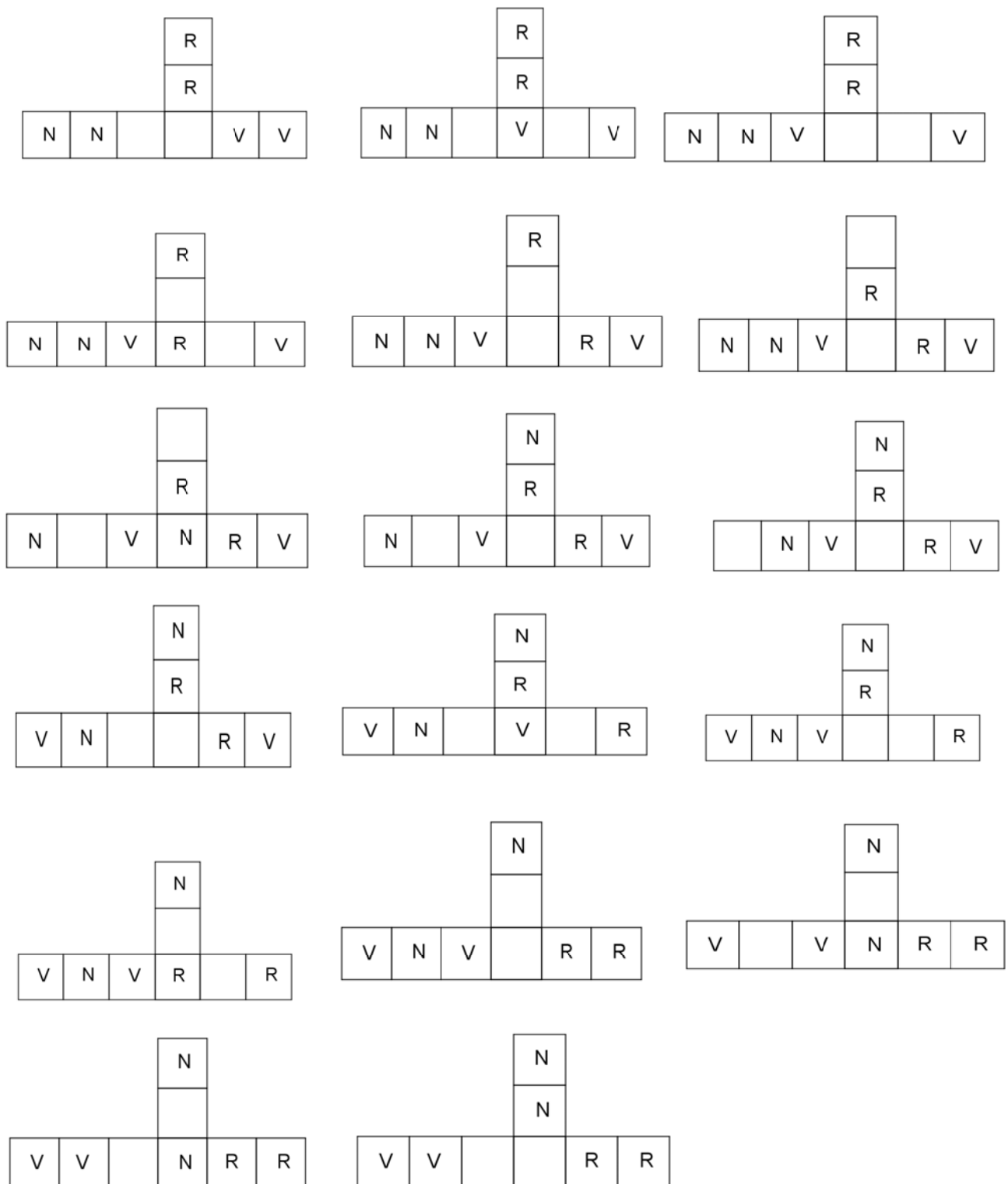
5 - Extension du problème

Et si maintenant on prend 3 troupeaux, que devient notre problème ?

Nous prenons 3 troupeaux de moutons de trois couleurs différentes et nous voulons échanger leur place. Nous nous sommes aperçus qu'il fallait rajouter une case vide (un espace). En rajoutant cette case l'extension du problème devient possible.

Nous noterons N un mouton noir, R un mouton rouge et V un mouton vert.

Prenons l'exemple de 2 moutons par troupeau. Nous voulons mettre les N à la place des R, les R à la place des V et les V à la place des N.



Remarque : Nous n'avons pas remarqué de suite pour avancées/sauts et rouges/verts/noirs comme dans le cas de deux troupeaux.

Nous avons trouvé un moyen très simple pour réussir à échanger nos troupeaux de places

sans trop réfléchir à l'ordre avancées/sauts et des couleurs. Voici le principe : nous choisissons un troupeau pour commencer et nous le faisons avancer au maximum sans que deux moutons de ce troupeau se trouvent côte à côte. Nous faisons de même avec l(es)'autre(s) troupeau(x) et ainsi de suite. Dans ce cas de 3 troupeaux, d'autres déplacements sont possibles pour réussir le jeu.