Sommes de carrés

par Rafik, Anne-Virginie, Karen, Stéphanie
du Lycée Georges Braque d'Argenteuil

enseignantes : Mmes Joëlle Richard et Christine Rouaud

chercheur : Mme Catherine Goldstein, mathématicienne, Université Paris XI, Orsay.

"Sommes de carrés" … Ces trois mots apparemment dénués d'intérêt allaient bientôt nous mener sur les traces de Pythagore.

Bien sûr, comme les vrais aventuriers, nous nous sommes maintes fois égarés dans les méandres de labyrinthes.

Seuls, face à des nombres qui nous menaient la vie dure, nous avons poursuivi nos investigations et, au bout du tunnel, guidés par la lumière de la connaissance suprême nous nous approchâmes du but recherché.

Le sujet étant vaste, nous nous sommes "divisés" en deux équipes, l'une décidait de s'attaquer aux applications géométriques des sommes de carrés à proprement parler et l'autre s'est mise à jouer avec d'originales “différences secondes”. Commençons par le travail de cette 2ème équipe :

Que se passe-t-il si l'on fait des sommes de deux carrés d'entiers consécutifs impairs ?
Désignons par A la somme :
$A = (2p+1)^2 + (2p+3)^2 = 8p^2 + 16p + 10$
puis par B la somme :
$B = (2p+3)^2 + (2p+5)^2 = 8p^2 + 32p + 34$
puis par C la somme :
$C = (2p+5)^2 + (2p+7)^2 = 8p^2 + 48p + 74$
On appelle différence seconde la quantité D suivante : $D = (C - B) - (B - A)$. Dans ce cas D = 16. *Mais a-t-on toujours ce résultat ?*

Par exemple, si on se fixe le premier terme de chaque somme (que l'on désigne par la lettre "a"), on obtient :
A : $a^2 + (2p+1)^2 = a^2 + 4p^2 + 4p + 1$
B : $a^2 + (2p+3)^2 = a^2 + 4p^2 + 12p + 9$
C : $a^2 + (2p+5)^2 = a^2 + 4p^2 + 20p + 25$
Dans ce cas précis D = 8.

<u>Loi d'Antoine 1</u> Quand je multiplie 9 par lui même, 1 fois 9x9 le résultat se termine par 1 2 fois 9x9x9 le résultat se termine par 9 3 fois 9x9x9x9 le résultat se termine par 1 4 fois 9x9x9x9x9 le résultat se termine par 9 … Si le nombre de multiplications est pair, le résultat se termine par 9, si il est impair, il se termine par 1.

Nous nous sommes alors posés la question : “Que se passerait-il si "a" n'était pas fixé ?”
Si a, b et c sont trois entiers (tous différents),
A : $a^2 + (2p+1)^2 = a^2 + 4p^2 + 4p + 1$
B : $b^2 + (2p+3)^2 = b^2 + 4p^2 + 12p + 9$
C : $c^2 + (2p+5)^2 = c^2 + 4p^2 + 20p + 25$
Ici $D = (C - B) - (B - A) = a^2 - 2b^2 + c^2 + 8$

Dans ce cas, D peut-il être aussi égal à 8 et ceci est réalisé si $a^2 + c^2 = 2 b^2$. D'où une orientation de notre recherche :
Peut-on trouver des entiers naturels a, b, c tels que $a^2 + c^2 = 2 b^2$ *?*
En collaboration avec nos camarades de Cergy et d'un ordinateur, nous avons élaboré une liste de triplets vérifiant l'égalité ci-dessus. Nous avons pu remarquer ainsi que les triplets fondamentaux a, b, c étaient des entiers a, b, c premiers entre eux (c'est-à-dire n'ayant aucun diviseur commun autre que 1) toujours impairs et de la forme 4p+1 ou 4p-1

Etudions donc d'un peu plus près cette égalité

$$\mathbf{a^2 + c^2 = 2 b^2 \quad (1)}$$

$2b^2$ est un nombre pair, cela entraine que :
1) Soit a et c sont pairs tous les deux ;
2) soit a et c sont impairs tous les deux.

1) dans le cas où a et c sont pairs, on retrouve une expression similaire à l'égalité (1). Si a et c sont pairs tous les deux : a = 2p ; c = 2p'
$a^2 + b^2$ s'écrit $4(p^2 + p'^2)$.
L'égalité $4(p^2 + p'^2)=2b^2$ entraine $b^2=2(p^2 + p'^2)$ donc b^2 est pair $b^2 = 4 b'^2$. Si $a^2 + c^2 = 2 b^2$ on est ramené à chercher p et p' entiers tels que $p^2 + p'^2 = 2b'^2$, qui est une égalité de type (1).

2) dans le cas où a et c sont impairs, on obtient alors b^2 impair donc b est impair.

Nous nous sommes aussi demandés si a, b et c pouvaient avoir un diviseur commun : dans ce cas, les calculs nous mènent à une expression similaire à (1) donc les recherches s'orientent vers trois nombres a, b et c impairs et premiers entre eux. Les trois nombres a, b et c impairs et premiers entre eux s'écrivent 4p + 1 ou 4p - 1. Pour la suite des recherches, nous admettons les résultats suivants :
1. “Tout diviseur d'une somme de carrés est une somme de carrés”.
2. “Tout diviseur premier d'une somme de carrés est de la forme 4p + 1 ou vaut 2”.
2. “Tout nombre premier de la forme 4p + 1 est une somme de deux carrés”.
(Jean Itard, *Arithmétique et théorie des nombres*, Que sais-je, PUF, Paris.)

$2\,b^2$ étant une somme de deux carrés, on peut alors dire que tous les diviseurs premiers de $2b^2$ sont de la forme 4p + 1 ou valent 2. b^2 est donc le produit d'un certain nombre d'entiers de la forme 4p + 1.

$$b = (4p_0 + 1)(4p_1 + 1)\dots(4p_n + 1)$$

$$b = \prod_{i=1}^{i=n} (4p_i + 1) \text{ avec } p_i \in \mathbb{N}$$

Par exemple, $2 \times 65^2 = 79^2 + 47^2 = 2 \times 5^2 \times 13^2$. $b^2 = 65^2$ donc $b = (4p_0+1)(4p_1+1)$ avec $p_0=1$; $p_1 = 3$.

On obtient donc tous les b possibles impairs, en multipliant entre eux les nombres de la forme 4p + 1. Voici le début de la liste de ces nombres : 1 5 9 13 17 21 25 29 ~~33~~ 37 41 45 ~~49~~ 53 ~~57~~ 61 65 ~~69~~ 73 ~~77~~ 81 85 89 ~~93~~ 97 101 ...[1]

b peut être, par exemple, le produit : 5x13 ou 5x17 ou 5x5 ou 17x53x61 … De cette manière-là, on peut obtenir tous les b. On retrouve tous ces nombres dans la liste de Cergy. Maintenant il reste un problème : *si on connait b peut-on trouver tous les couples (a,c) tels que $a^2 + c^2 = 2\,b^2$?*

Par exemple à partir de b = 65, on a plusieurs décompositions d'après cette liste : $2 \times 65^2 = 79^2 + 47^2$ et $2 \times 65^2 = 89^2 + 23^2$. Nous sommes donc passés de la recherche de a et c tels que $a^2 + c^2 = b^2$, à celle de a et c tels que $a^2 + c^2 = 2b^2$. Nos camarades de Cergy avaient trouvé des formules pour déterminer certains nombres entiers a et c tels que $a^2 + c^2 = b^2$. Peut-être *pourrait-on trouver des formules nous permettant de connaître tous les couples a et c tels que $a^2 + c^2 = 2b^2$*. Peut-être aussi peut-on trouver une réponse à la question : *existe-t-il a et c tels que $a^2 + c^2 = n\,b^2$ (où n est un entier naturel non nul) ?*

avec des ciseaux

Notre désir est ici d'essayer de découper certaines figures géométriques simples de manière à reconstituer 2 carrés en utilisant tous les morceaux obtenus par ce découpage. On s'autorisera à découper (avec des ciseaux) des morceaux à côtés rectilignes. En réalité, dans les exemples que nous vous proposons, nous n'avons utilisé pour ces morceaux de puzzle, que des triangles, des carrés et des rectangles. Pour cela, nous avons d'abord utilisé le résultat suivant : on sait que le produit de la somme de deux carrés est égale à la somme de deux carrés.

On pose $a^2 + b^2 = c$; $d^2 + e^2 = f$ avec a,b,e,d entiers naturels d'où c et f entiers.

$$\begin{aligned} c\,f &= (a^2 + b^2)(d^2 + e^2) \\ &= a^2d^2 + e^2a^2 + d^2b^2 + b^2e^2 \\ &= (ad+be)^2 + 2abde + (ae-bd)^2 - 2abde. \end{aligned}$$

Donc

$$(a^2 + b^2)(d^2 + e^2) = (ad + be)^2 + (ae - bd)^2 \quad (1)$$

De même, on peut montrer que

$$(a^2 + b^2)(d^2 + e^2) = (ad - be)^2 + (ae + bd)^2.$$

On a donc trouvé deux manières différentes de décomposer le produit de la somme de deux carrés en la somme de deux carrés. Mais nous n'avons pas cherché à savoir si on pouvait trouver d'autres manières de faire cette décomposition. Nous nous sommes intéressés uniquement, à reconstituer 2 carrés à côtés entiers.

Afin d'appliquer la formule, on va procéder au découpage d'un rectangle dont les côtés pourront être mesurés par $L = a^2 + b^2$ et $l = c^2 + d^2$.

[1] NDLR : la liste en question ***n'est pas*** la liste des impairs de la forme 4p+1, mais celle des premiers de la forme 4p+1, ou des produits de tels premiers ; 49 est barré car ne convient pas : 49 = 4x12 + 1 = (4x2 - 1)(4x2 - 1) ; de même pour les autres entiers barrés par nous dans la liste des élèves.

Est-il possible de découper un rectangle en deux carrés ?

On utilise les formules précédemment démontrées ; alors on pense qu'on pourra découper le rectangle de dimensions l et L en deux carrés dont la somme $X^2 + Y^2 = Lxl$; si on peut choisir a, b , c , d tels que $L = a^2 + b^2$ et $l = c^2 + d^2$ alors $X = ad + be$; $Y = ae - bd$. X^2 est l'aire du premier carré, Y^2 l'aire du second carré.

La formule précédente nous montre que le problème est théoriquement possible. Exemple : on choisit des valeurs quelconques de a, b, e, d : a = 1 ; b = 2 ; d = 4 ; e = 3.

d'après (1) :

$(a^2 + b^2)(d^2 + e^2) = (ad+be)^2 + (ae-bd)^2$

$(1^2 + 2^2)(4^2 + 3^2) = (1x4+2x3)^2 + (1x3-2x4)^2$

$(5)\ (25) = (10)^2 + (5)^2$

$l \times L = X^2 + Y^2$

(aire d'un rectangle = somme des aires de deux carrés). Nous avons réalisé ce découpage (figure R1 :).

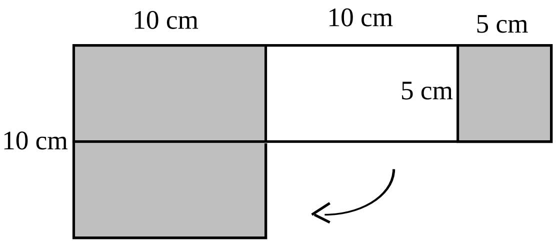


figure R1

De même, on peut transformer un rectangle de largeur l = 13 cm et de longueur L = 17 cm en deux carrés d'aires respectives 14 cm² et 5 cm². (figure R2 :)

Découpage d'un rectangle 13 × 17 en deux carrés de côtés respectifs 5 × 5 et 14 × 14.

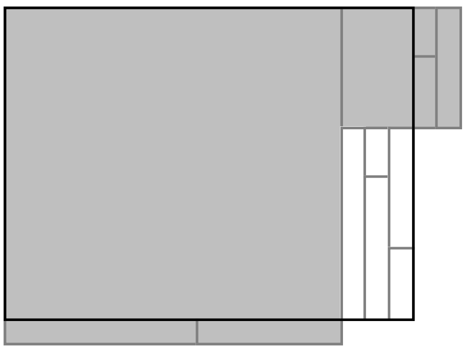


figure R2

Loi de Vannyna 1

Si N est n'importe quel nombre, N x 1 = N.

Et maintenant procédons au découpage d'un triangle rectangle.

On s'est ensuite demandé s'il était possible de découper de la même manière un triangle rectangle. Pour cela, on utilise la formule A = (Lxl)/2. La somme des aires des carrés $X^2 + Y^2 = (Lxl)/2$ d'où $2(X^2 + Y^2) = Lxl$. On prend toujours 2 comme mesure de l'un des côtés de l'angle droit. Exemples :

$Lx\,l = 2(X^2 + Y^2)$

$2x17 = 2(4^2 + 1^2)$: figure T1.

$2x18 = 2(3^2 + 3^2)$

Découpage d'un triangle 17 × 2 en deux carrés de côtés respectifs 1 × 1 et 4 × 4.

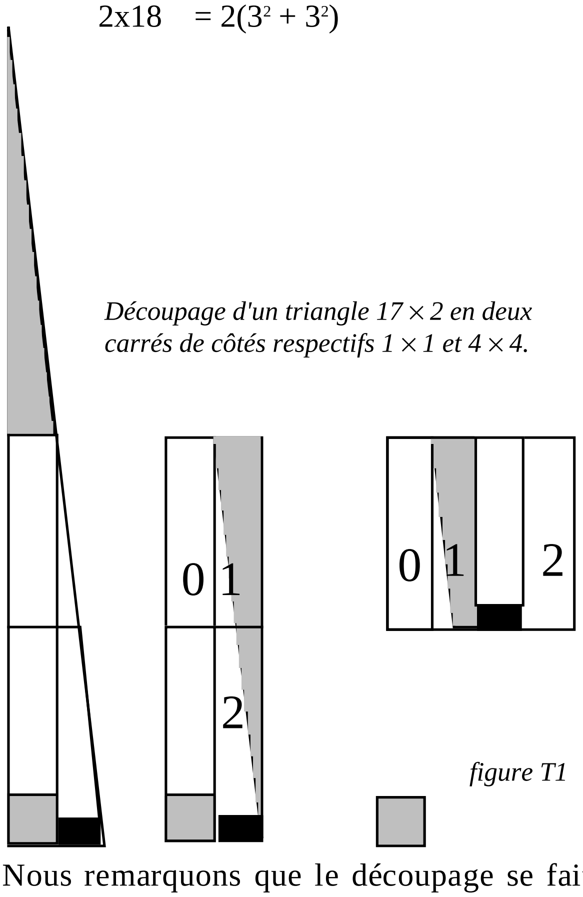


figure T1

Nous remarquons que le découpage se fait plus facilement quand l'autre côté de l'angle droit du triangle rectangle est mesuré par un nombre pair. La méthode utilisée pour la figure T1 est applicable pour d'autres cas : exemple c = 2 ; b = 13.

Nous n'avons présenté ici que quelques cas limites pour lesquels notre découpage "réussissait". Mais de nombreuses questions restent posées. Par exemple, *les côtés des triangles utilisés pourraient-ils être mesurés uniquement par des nombres entiers ? Pourrait-on introduire dans les morceaux du puzzle des figures à côtés non-rectilignes ?*

Voilà, nous vous avons présenté les résultats des recherches de nos deux équipes pendant six mois. Il reste encore beaucoup de découvertes à faire, en particulier dans le domaine des applications géométriques. Mais, notre travail devant s'achever en mai, nous laissons le soin à de nouveaux "aventuriers en herbe" de continuer et d'appronfondir nos recherches lors de "MATh.en.JEANS acte IV" et, qui sait, peut-être les retrouverons nous de nouveau …

NDLR : les élèves du lycée Racine ayant abandonné leur participation à "MATh.en.JEANS" en cours d'année, ceux de Georges Braque se sont retrouvés sans correspondants (dommage …). Des mathématiciens du LSD2 se sont proposés pour jouer un rôle de correspondants, et ont donc "planché" sur les sujets. Ils ont envoyé par fax les résultats de leurs cogitations, mais trop tard pour les élèves de Braque, dont le travail était déjà avancé. A titre de pistes de recherches envisageables pour les lecteurs de cette brochure, nous vous proposons ce travail du LSD2 de Grenoble.

point de départ : **sommes de deux carrés.**

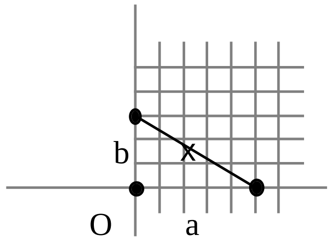
Approches : Pythagore … c'est pas marrant, on connait : c'est de la géométrie qu'il faut faire (*tout le groupe sauf un*).
De combien de manières ?
$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = \dots$? on ne voit rien.
le "*géomètre*" : il suffit de trouver les points entiers sur un cercle de rayon entier.
le groupe : non, ça ne marche pas : c'est le carré de l'hypoténuse qui est entier, pas l'hypoténuse elle-même.

Puis nous avons tenté de compter le nombre b_n de nombres de la forme $a^2 + b^2$ ("bicarrés") qui sont plus petits que n.

Théorème : $n/4 < b_n < n/2$

Démonstration : par estimation du nombre de couples (a, b) tels que $a^2, b^2 < n/2$. (Les calculs peuvent être refaits.)

Conjecture : $b_n/n \to$ limite λ quand $n \to \infty$.
Indépendamment, une partie du groupe a repris l'idée géométrique : un triangle à sommets entiers de la forme :



Ces triangles ont le milieu de leur hypoténuse sur une grille plus fine que le réseau entier (réseau 1/2 entier) : le cercle circonscrit a son centre sur la grille et les sommets du triangle sont sur la grille !

Question : Quel est le nombre de points entiers sur un cercle de centre entier et de rayon entier ? 0 en général, et s'il y en a 1 il y en a 8 (sauf cas très particulier où c'est 4). Ça ne doit pas être possible d'en avoir plus de 8.
Donc : s'il y a u_n points entiers entre les cercles de rayons n^2 et $(n+1)^2$ alors il y a à peu près $u_n/8$ nombres de la forme $a^2 + b^2$ entre n^2 et $(n+1)^2$.
Or le nombre de points entiers dans une couronne plane est à peu près l'aire de cette couronne. Donc il y a environ $2n\pi/8$ nombres "bicarrés" parmi les 2n nombres $> n^2$ et $\leq (n+1)^2$. Ou encore $u_n \approx n\ \pi/4$. **La proportion de bicarrés est donc à peu près $\pi/8$**. En fait, il faut faire attention parce qu'on a changé de grille ; mais ça ne doit rien changer.

Conjecture : La proportion de bicarrés dans les intervalles entre deux carrés consécutifs va tendre vers $\pi/8$.

Il est intuitivement évident à un membre du groupe (qui a à peu près convaincu les autres que c'était évident, par exemple si on interprète, comme un autre membre du groupe, les bicarrés comme les boules noires dans un sac de boules blanches et noires représentant les nombres) que la limite λ de b_n/n est la même que celle de u_n/n soit $\pi/8$.

Conjecture : La probabilité pour qu'un nombre entier pris au hasard soit bicarré est $\pi/8$.

Problème : de combien de manières un nombre peut-il être somme de deux carrés ?
On a $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ implique $(a+c)(a-c) = (b+d)(d-b)$.
On trouve par cette méthode : $37^2 + 3^2 = 17^2 + 33^2$
$37^2 + 9^2 = 19^2 + 33^2$ $17^2 + 9^2 = 19^2 + 3^2$

13 décembre 1991, Pierre Duchet, Michel Molard, Charles Payan, Sidi-Bekaye Sokouna du LSD2.