Triangles à trois couleurs

Farid ARTHAUD, Daniel LEFEBVRE,
Loughlin DUDLEY, Barthélémy GUIOL

élèves de 5ème (3, 4 et 5), Cité Scolaire Internationale de Grenoble (38)
Enseignants : Mme GUIOL, Mme DUMAS
Chercheur : Romain JOLY

Sujet

Un grand triangle est découpé en plusieurs petits triangles disposés «bord à bord» : deux petits triangles différents ne pevent partager qu'un de leurs sommets ou l'un de leurs cotés. On attribue alors à chaque sommet de petit triangle une couleur parmi 3 possibles, de manière à ce que (i) les sommets du grand triangle reçoivent des couleurs différentes, et (ii) chaque coté du grand triangle ne fait apparaître que 2 couleurs.

On s'intéresse au nombre de petits triangles tricolores apparaissant dans de telles colorations : peut-il être nul ? Est-il toujours impair ?

Mots-clés

TRIANGULATION, 3 COULEURS, COLORATION, TRIANGLE, LEMME DE SPERNER, GRAPHE, PLAN

Situation initiale de recherche

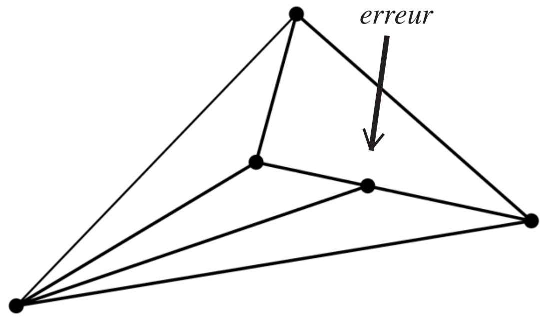
On dispose d'un grand triangle, dont les trois sommets sont de couleurs différentes : blanc, noir et gris.

On découpe ensuite ce triangle en autant de petits triangles que l'on veut, en respectant la règle suivante. [On appelle «arête» tout coté de petit triangle]

Règle 1 – règle de triangulation

Un sommet situé à l'intérieur du grand triangle ne doit jamais se trouver sur une arête.

Un découpage respectant une telle règle s'appelle une *triangulation*.



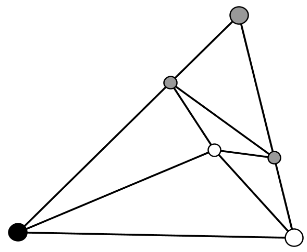
Exemple de triangulation incorrecte

On colorie ensuite les sommets des petits triangles en respectant la règle suivante.

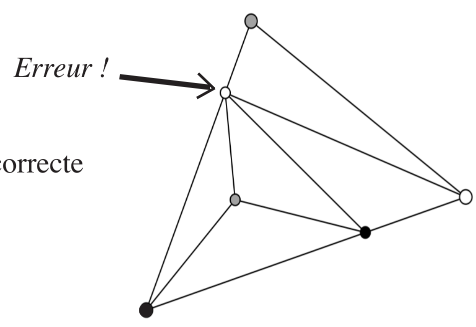
Règle 2 – règle de coloration

• *Un sommet situé à l'intérieur du grand triangle est colorié comme on veut en blanc ou en noir ou en gris.*

• *Un sommet situé sur une arête du grand triangle, est colorié comme on veut, en une des deux couleurs des sommets qui sont reliés par cette arête ;*



Coloration correcte



Coloration incorrecte

Un triangle dont les sommets sont de trois couleurs différentes sera nommé par la suite *triangle tricolore*.

Théorème [?]

On considère un grand triangle tricolore. Quels que soient la triangulation et le coloriage, respectant la règle 1 et la règle 2, il existe au moins un petit triangle tricolore.

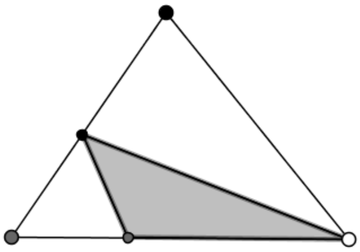
Conjecture

On considère un grand triangle tricolore. Quels que soient la triangulation et le coloriage, respectant la règle 1 et la règle 2, le nombre de petits triangles tricolores est impair.

Idée de preuve

Nous avons essayé de trouver des contre-exemples pour notre conjecture, mais n'avons rien trouvé. Nous avons d'abord essayé de chercher sur des exemples simples.

Dans l'exemple ci-contre, on retrouve bel et bien un nombre impair de triangles : un seul.



Puis nous avons pris des exemples plus complexes choisis au hasard ou stratégiquement.

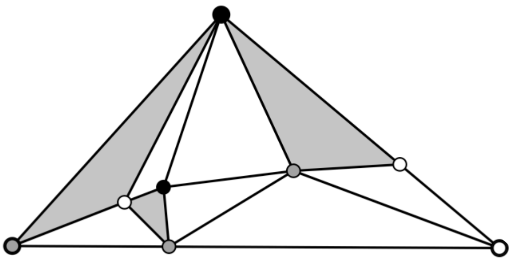
Dans le cas d'une triangulation plus compliquée, le but est d'obtenir un découpage simplifié, pour lequel on peut démontrer (en étudiant tous les cas possibles) qu'il existe au moins un triangle tricolore.

Pour réduire le nombre de petits triangles inutiles (qui ne sont pas tricolores) sans éliminer des triangles tricolores on propose la règle suivante.

Règle « d'étirement ».

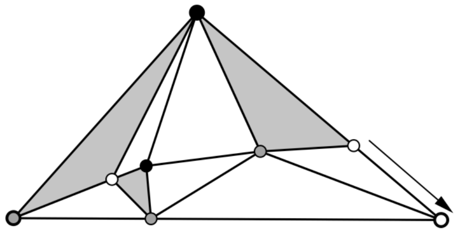
Pour « étirer », on superpose un sommet sur un autre sommet *de la même couleur* de façon à ce que les côtés des triangles se superposent les uns sur les autres et que la règle de triangulation soit respectée.

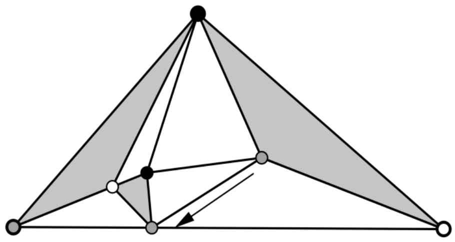
Exemple

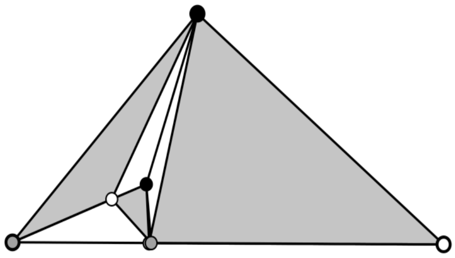


Dans ce cas, on a trois petits triangles tricolores.

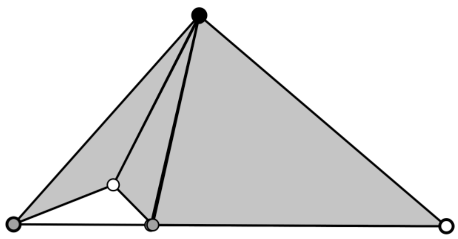
Pour simplifier la figure, on va appliquer la règle d'étirement autant de fois que possible.







On étire le petit point noir sur le grand point noir.



? Après « étirement» on a autant de triangles tricolores qu'auparavant, puisqu'on n'a éliminé que des triangles non tricolores (inutiles).

[En admettant des arêtes courbes et des triangulations plus générales (avec bord polygonal admettant éventuellement des sommets répétés et avec des petits triangles pouvant partager plus d'un coté), on pourrait prolonger les étirements jusqu'à obtenir une figure ne comportant que des triangles tricolores (au moins 1 puisque les étirements ne peuvent faire disparaître une couleur !).
Ainsi, dans l'exemple donné, un dernier étirement superposant les deux sommets gris donnerait une figure avec 3 «triangles courbes» tricolores]

***

Remarque du chercheur

Le résultat étudié ici s'appelle le *lemme de Sperner*. Il s'agit d'un résultat topologique fort équivalent au théorème de point fixe de Brouwer (toute transformation continue du disque admet un point fixe). Il en existe de multiples démonstrations mais celle trouvée par les élèves m'était inconnue.