Un triangle peut en cacher (beaucoup) d'autres

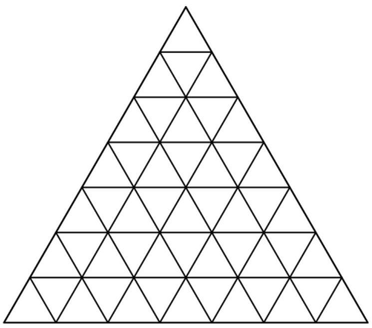
Année 2020-2021

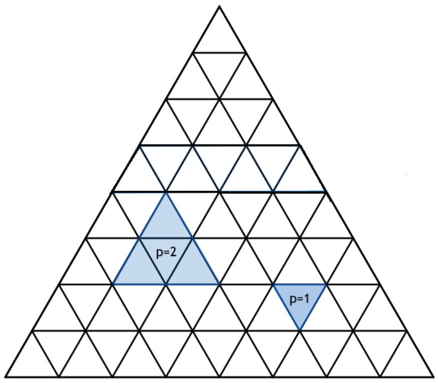
Auteurs : Arnaud PÉLISSIER, Jérémy RABIER, Killian VINCENT, Fanch YATTOU GARNY.
Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).
Encadrés par : Fabien AOUSTIN, Thomas FORGET.
Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, LaSIE, UMR CNRS 7356, La Rochelle Université.

Dans cet article, on s'intéresse au dénombrement de triangles de toutes tailles dans une figure triangulaire, découpée régulièrement en triangles équilatéraux de même taille.

1) Présentation de la problématique :

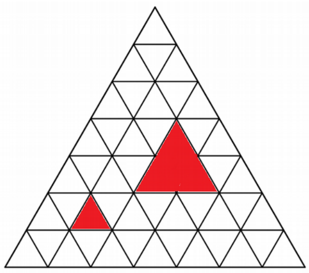
On découpe un « grand » triangle (appelé ***figure*** dans la suite) à n ***étages*** (ci-dessous, on a $n = 7$) en « petits » triangles équilatéraux identiques :

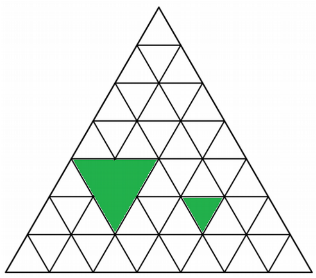




On note p les ***tailles*** des différents (petits) triangles que l'on peut trouver dans la figure.

On veut dénombrer l'ensemble des triangles (de taille p quelconque) dans une figure à n étages.



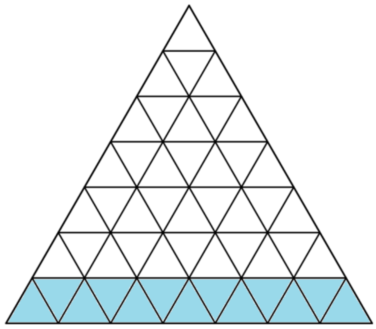


Après diverses simulations, nous avons séparé nos calculs en dénombrant les triangles « **tête (*vers le*) haut** » tout d'abord, puis les triangles « **tête (*vers le*) bas** » ensuite.

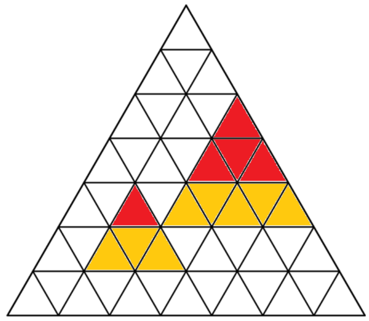
Du fait du fonctionnement hybride de notre lycée en cette année particulière (présentiel une semaine sur deux), nous avons été séparés en deux groupes. Chaque groupe a pu arriver aux mêmes formules finales, qui dénombrent le nombre total de triangles dans cette figure, mais selon une approche différente. Dans cet article, nous présenterons séparément ces deux approches.

2) Première approche

2-a) Nombre de triangles « tête haut » :

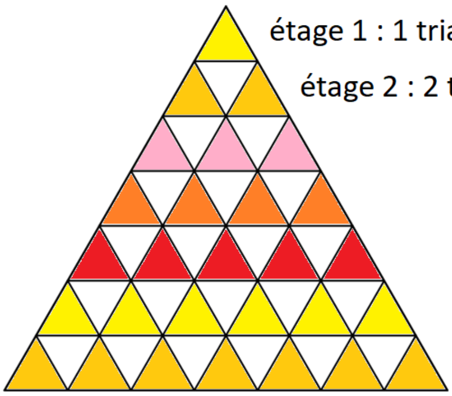


Pour les triangles « tête haut », on établi une relation entre le nombre de triangles « tête haut » dans une figure à n étages, et ceux dans une figure à $n-1$ étages (sans l'étage bleu).



On remarque que les triangles « tête haut » de taille p dans une figure à n étages correspondent à ceux de taille $p-1$ dans une figure à $n-1$ étages.

Ensuite, on dénombre les triangles « tête haut » de taille 1 dans une figure à n étages :



Il y a $1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2}$ triangles « tête haut » de taille 1 dans une figure à n étages.

Si on note h_n le nombre total de triangles « tête haut » (de toutes tailles) dans une figure à n étages : Alors h_n est donc égal à h_{n-1}, à qui l'on ajoute le nombre de triangles « tête haut » de taille 1 dans une figure à n étages, soit $\frac{n(n+1)}{2}$. Nous en déduisons que, pour tout entier n, $h_n=h_{n-1}+\frac{n(n+1)}{2}$.

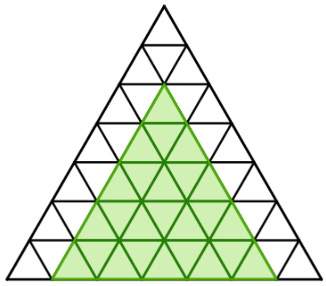
On arrive donc à $h_n=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{(n-1)n}{2}+...+\frac{1\times 2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{i(i+1)}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n}i^2+\sum_{i=1}^{n}i\right)$.

Comme on peut démontrer par récurrence que $1^2+2^2+...+n^2=\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On en déduit $h_n=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right)=\frac{n(n+1)(2n+1)+3n(n+1)}{12}=\frac{n(n+1)(2n+1+3)}{12}$.

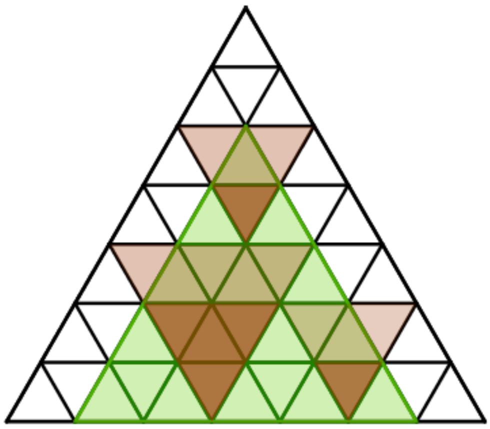
Finalement : Pour tout entier n, $h_n=\frac{n(n+1)(2n+4)}{12}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

2-b) Nombre de triangles « tête bas » :



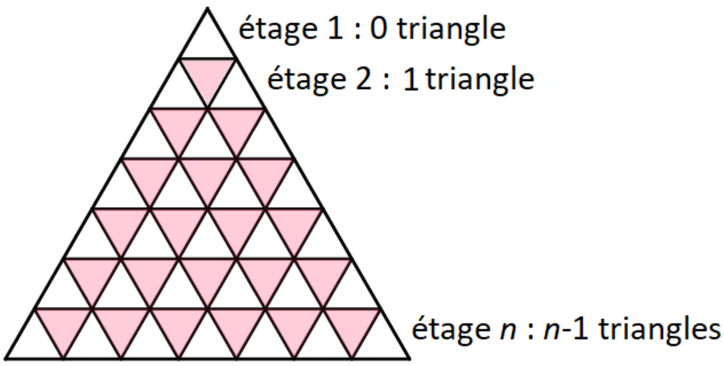
Dans le cas des triangles « tête bas », la relation que l'on obtient lie les figures à n étages et à $n - 2$ étages, en exploitant la connexion illustrée sur la figure ci-contre :

Nous remarquons alors une connexion entre les triangles des figures à n et $n - 2$ étages :



Les triangles « tête bas » de taille p dans une figure à n étages correspondent aux triangles « tête bas » de taille $p - 1$ dans une figure à $n - 2$ étages.

Il nous faut dénombrer le nombre de triangles « tête bas » de taille 1 dans une figure à n étages :



Il y a donc $1+2+\ldots(n-1)=\frac{(n-1)n}{2}$ triangles « tête bas » de taille 1 dans une figure à n étages.

Si on note b_n le nombre total de triangles « tête bas » (de toutes tailles) dans une figure à n étages :

On a donc montré que pour tout entier n, $b_n=b_{n-2}+\frac{(n-1)n}{2}$.

Cette formule indique que, pour les triangles « tête bas », il faut séparer les études pour les figures ayant un nombre ***pair*** d'étages, des figures ayant un nombre ***impair*** d'étages.

Cas où n est pair ($n = 2k$) :

On arrive, pour tout entier k, à $b_{2k}=\frac{2k(2k-1)}{2}+\frac{(2k-2)(2k-3)}{2}+\ldots+\frac{2\times 1}{2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{2i(2i-1)}{2}$, ou encore $b_{2k}=\sum_{i=1}^{k}2i^2-i=2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}-\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}$.

Cas où n est impair ($n = 2\,k + 1$) :

On arrive, pour tout entier k, à $b_{2k+1}=\frac{(2k+1)(2k)}{2}+\frac{(2k-1)(2k-2)}{2}+\ldots+\frac{3\times 2}{2}=\sum_{i=1}^{k}\frac{(2i+1)2i}{2}$,

ou encore $b_{2k+1}=\sum_{i=1}^{k}2i^2+i=2\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$.

2-c) Nombre total de triangles :

En notant u_n le nombre de triangles dans une figure à n étages, on conclut que :

Si n est pair ($n = 2\,k$) :

$u_{2k}=h_{2k}+b_{2k}=\frac{2k(2k+1)(2k+2)}{6}+\frac{k(k+1)(4k-1)}{6}=\frac{k(k+1)\times(2(2k+1)+(4k-1))}{6}$ ou, pour tout entier k, $u_{2k}=\frac{k(k+1)(4k+1)}{2}$.

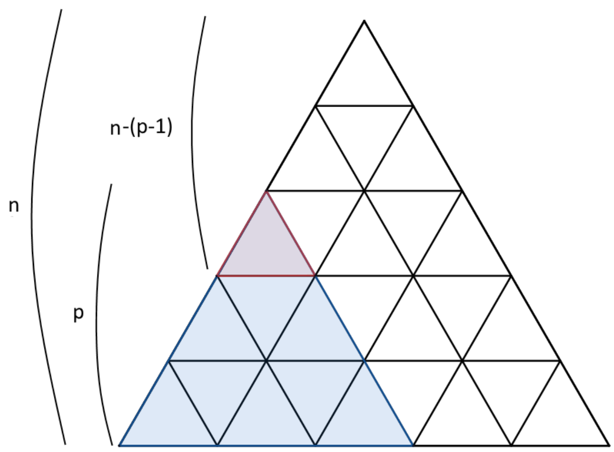
Si n est impair ($n = 2\,k + 1$) :

$u_{2k+1}=h_{2k+1}+b_{2k+1}=\frac{(2k+1)(2k+1+1)(2k+1+2)}{6}+\frac{k(k+1)(4k+5)}{6}$ ou, pour tout entier k,

$u_{2k+1}=\frac{(k+1)\,(2(2k+1)(2k+3)+k(4k+5))}{6}=\frac{(k+1)(4k^2+7k+2)}{2}$.

3) Deuxième approche

3-a) Nombre de triangles « tête haut » :

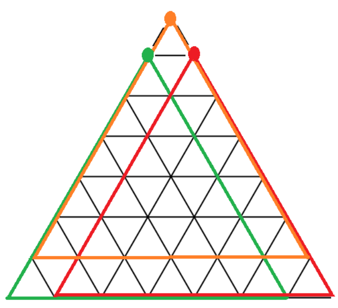


Dans cette approche, le constat initial est qu'il y a autant de triangles « tête haut » de taille p dans une figure à n étages, que de triangle « tête haut » de taille 1 dans une figure à $n-(p-1)=n-p+1$ étages.

Comme il y a $\frac{n(n+1)}{2}=1+2+\ldots+n$ triangles « tête haut » de taille 1 dans une figure à n étages :

Il y a donc $1+2+\ldots+(n-p+1)$ triangles « tête haut » de taille 1 dans une figure à $n-p+1$ étages.

On en déduit que, pour une taille p fixée, on dénombre $1+2+\ldots+(n-p+1)$ triangles « tête haut » de taille p dans une figure à n étages.



Interprétation de cette formule : Lorsque l'on dénombre les « têtes » des triangles, étage après étage :

Par exemple (cas $p = n-1$), on a 1 triangle de taille n-1 tout en haut, puis 2 autres juste en dessous.

On calcule donc le nombre de triangles « tête haut » dans une figure à n étages (de toutes tailles), en exploitant la formule $1+2+3+...+(n-p+1)$ de la manière suivante :

1	(cas $p = n$)
$+ 1 + 2$	(cas $p = n - 1$)
$+ \ldots +$	
$+ 1 + 2 + \ldots + n$	(cas $p = 1$)

En additionnant par colonnes, on trouve : $h_n = n\times 1+(n-1)\times 2+(n-2)\times 3+...+(n-(n-1))\times n$.
D'où, en développant : $h_n = n+2n+...+n^2-(1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+(n-1)\times n)$.

En remarquant que $n+2n+...+n^2 = n\times\sum_{i=1}^{n} i = n\times\frac{n(n+1)}{2}$, et que

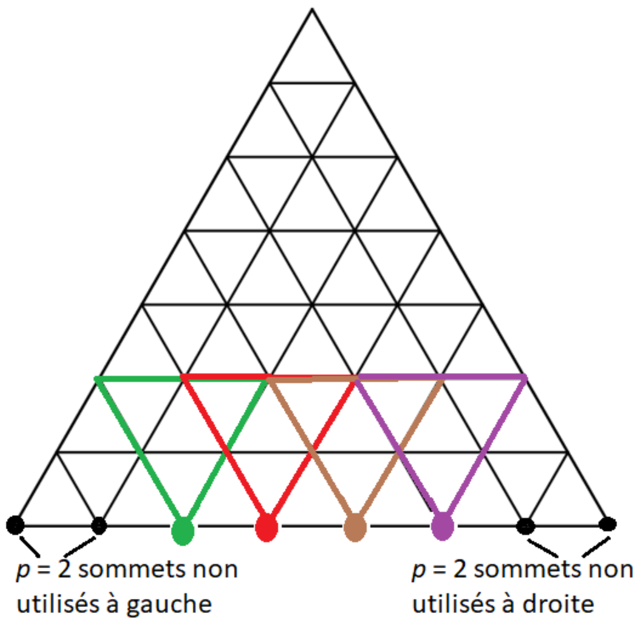
$1\times 2+2\times 3+3\times 4+...+(n-1)n = \sum_{i=0}^{n-1} i(i+1) = \sum_{i=0}^{n-1} i^2+i$.

On en déduit, après simplifications, que $h_n = \frac{n^3+3n^2+2n}{6}$.

3-b) Nombre de triangles « tête bas » :

Notre approche pour les triangles « tête bas » consiste tout d'abord à dénombrer le nombre de têtes de tels triangles, à chaque étage.

On remarque que, lorsque l'on s'intéresse aux sommets des triangles « tête bas » de taille p : On laisse p sommets à gauche et aussi à droite (parmi les n+1 sommets possibles).



Nous dénombrons donc $n + 1 - 2p$ têtes de triangles « tête bas » de taille p au dernier étage d'une figure à n étages.
À l'étage $n - 1$, il y a 1 tête de moins, ce qui donne donc $n - 2p + 1 - 1 = n - 2p$ têtes de triangles « tête bas » de taille p. Et ainsi de suite jusqu'à arriver à un étage avec une seule tête.

Par suite, nous en déduisons qu'il y a $(n - 2p + 1) + (n - 2p) + \ldots + 2 + 1$ triangles « tête bas » de taille p dans une figure à n étages, formule que nous écrirons $1 + 2 + \ldots + (n - 2p + 1)$.

Remarque : Il y a donc $1 + 2 + \ldots + (n - 2(p - 1) + 1) = 1 + 2 + \ldots + (n - 2p + 1 + 2)$ triangles « tête bas » de taille $p - 1$ dans une figure à n étages.
On remarque que deux termes sont ainsi ajoutés à cette somme, lorsque l'on réduit la taille p de 1.
Ce sont : $n - 2p + 2$, et $n - 2p + 3$.

Ce qui nous conduit à séparer le cas où le nombre d'étages n est ***pair***, du cas où n est ***impair***.

Dans le cas où n est ***pair*** ($n = 2\,k$), le nombre de triangles « tête bas » de toutes tailles est égal à :

$$\begin{array}{ll}
\quad 1 & (p = k) \\
+\,1\ +\ (2\ +\ 3) & (p = k-1) \\
\quad +\ \ldots \qquad + & \\
+\,1\ +\ (2\ +\ 3)\ +\ \ldots + (n-2+n-1) & (p = 1)
\end{array}$$

En additionnant par colonnes, on en déduit que :

$$b_n = \frac{n}{2}\times 1 + \left(\frac{n}{2}-1\right)\times(2+3)+\ldots+\left(\frac{n}{2}-\left(\frac{n}{2}-1\right)\right)\times(n-2+n-1)\quad .$$

En développant le résultat précédent suivant le code couleur, on trouve :

$$b_n = \frac{n}{2}\times(1+(2+3)+\ldots+(n-2+n-1)) - \left(1\times(2+3)+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times(n-2+n-1)\right)\quad .$$

On remarque alors que $\frac{n}{2}\times(1+(2+3)+\ldots+(n-2+n-1)) = \frac{n}{2}\times\frac{(n-1)n}{2}$, et que

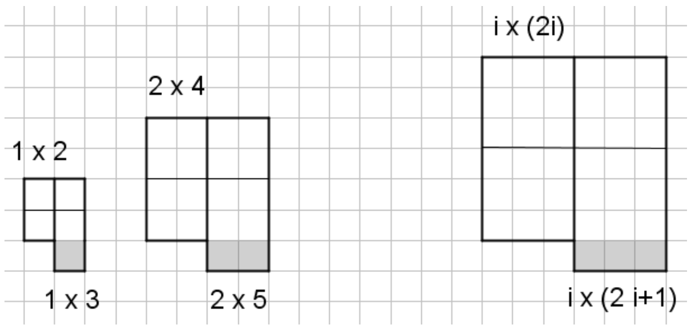
$$1\times(2+3)+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times(n-2+n-1) = \sum_{i=1}^{n/2-1} i\times(2i+(2i+1)) = \sum_{i=1}^{n/2-1} i\times(4i+1)$$

D'où $1\times(2+3)+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times(n-2+n-3) = \sum_{i=1}^{n/2-1} 4i^2+i$.

Après simplifications, nous arrivons à $b_n = \frac{2n^3+3n^2-2n}{24}$, dans le cas où n est pair.

__Remarque :__

Dans un premier temps, nous avions simplifié la formule $1\times(2+3)+\ldots+\left(\frac{n}{2}-1\right)\times(n-2+n-1)$ *graphiquement, de la manière suivante :*



Un terme de cette somme consiste donc à compter 4 carrés de côté de longueur i et un rectangle (grisé) de largeur 1 et de longueur i, d'où le 4 i² + i.

Dans le cas où n est ***impair*** ($n = 2\,k + 1$), le nombre de triangles « tête bas » de toutes tailles vaut :

$$\begin{array}{ll} \quad(1 + 2) & (p = k) \\ +\,(1 + 2) + (3 + 4) & (p = k-1) \\ \quad + \quad \dots \quad + & \\ +\,(1 + 2) + (3 + 4) + \dots + (n-2+n-1) & (p = 1) \end{array}$$

En additionnant par colonnes, on en déduit que

$$b_n = \left(\frac{n-1}{2}\right)\times(1+2) + \left(\frac{n-1}{2}-1\right)\times(3+4)+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}-\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\right)\times(n-2+n-1) \ .$$

En développant le résultat précédent suivant le code couleur, on trouve :

$$b_n = \frac{n-1}{2}\times(1+2+3+4+\ldots+n-2+n-1) - \left(1\times(3+4)+\ldots+\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\times(n-2+n-1)\right) \ .$$

Et ainsi $b_n = \frac{n-1}{2}\times\frac{(n-1)n}{2} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2-1} i\times(2i+1+2i+2) = \frac{n-1}{2}\times\frac{(n-1)n}{2} - \sum_{i=1}^{(n-1)/2-1} 4i^2+3i$.

(*Comme dans le cas où n est pair, le terme bleu avait été étudié avec des considérations géométriques, dans un premier temps.*)

Après simplifications, nous arrivons à $b_n = \frac{2n^3+3n^2-2n-3}{24}$, dans le cas où n est impair.

3-c) Nombre total de triangles :

Si n est ***pair*** : $u_n = h_n + b_n = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} + \frac{2n^3+3n^2-2n}{24} = \frac{2n^3+5n^2+2n}{8}$.

Si n est ***impair*** : $u_n = h_n + b_n = \frac{n^3+3n^2+2n}{6} + \frac{2n^3+3n^2-2n-3}{24} = \frac{2n^3+5n^2+2n-1}{8}$.