

Mesurer la Terre

Romain JOLY
Université Grenoble Alpes

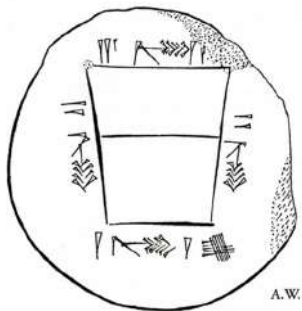
- 1 Géo-métrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion

Géo-métrie

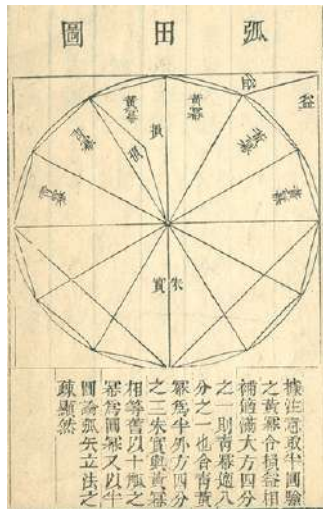
La tablette mésopotamienne AO 05677 a plus de 4 000 ans.
C'est un cadastre recensant les mesures de champs.



La tablette IM 58045, vieille aussi de plus de 4 000 ans, provient de Nippur.



Les dimensions du champ sont données (par exemple la grande base fait 2 cannes et 5 coudées), il faut déterminer comment le couper en deux équitablement.



Les **Neuf Chapitres** (2ème-1er siècle avant J.C.) forment le grand classique des mathématiques chinoises.

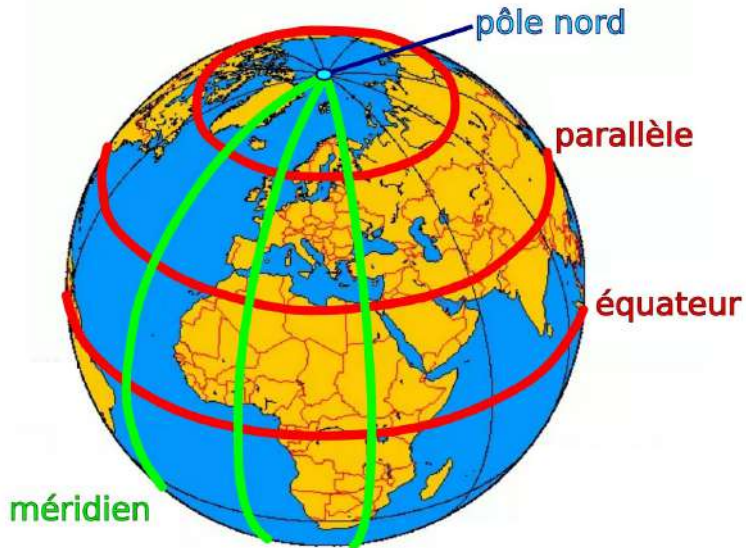
Le premier chapitre s'intitule « **Champs Rectangulaires** » et est sous-titré « **pour traiter les territoires des terres cultivées** ».

Le théorème de Pythagore y apparaît dans le chapitre 9 appelé « **Base et hauteur** ».

Les bases de l'orientation

- 1 Géo-métrie
- 2 Les bases de l'orientation**
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion

Les bases de l'orientation



Les bases de l'orientation

Système de coordonnées de position sur la Terre

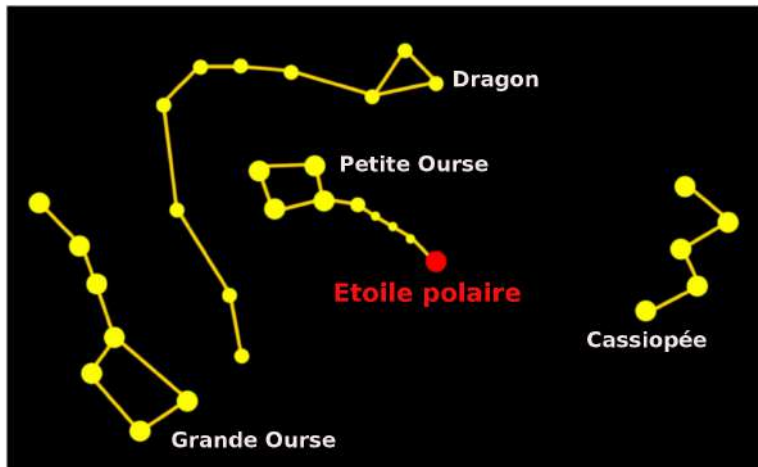


Grenoble :

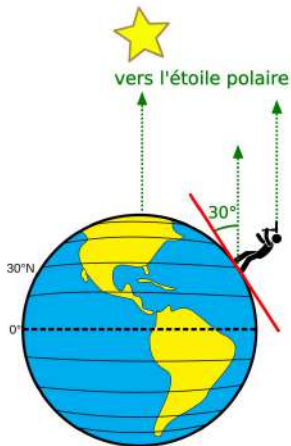
Latitude $45^{\circ} 11' N$

Longitude $05^{\circ} 43' E$

Les bases de l'orientation



Les bases de l'orientation



Il est facile de mesurer la latitude la nuit à l'aide de l'étoile polaire. C'est aussi possible de jour si on connaît bien la trajectoire du Soleil.

Il est beaucoup plus difficile de mesurer la longitude, surtout au cours de voyages.

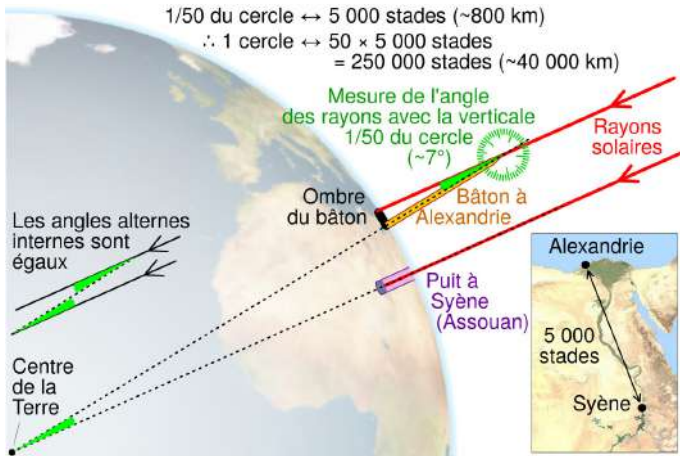


La taille de la Terre

- 1 Géométrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre**
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion

Eratosthène

Eratosthène évalue en 230 av. J.-C la circonférence de la Terre avec une méthode simple.



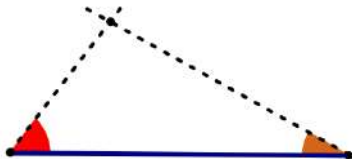
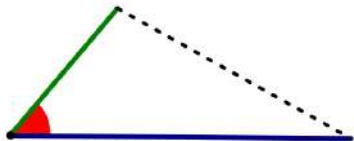
Précis à 2% près avec un bâton et un calcul simple !
Sauf que...

La trigonométrie

- 1 Géométrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie**
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion

La trigonométrie

Si trois mesures (dont une longueur) d'un triangle sont connues, alors toutes les mesures du triangle sont connues.



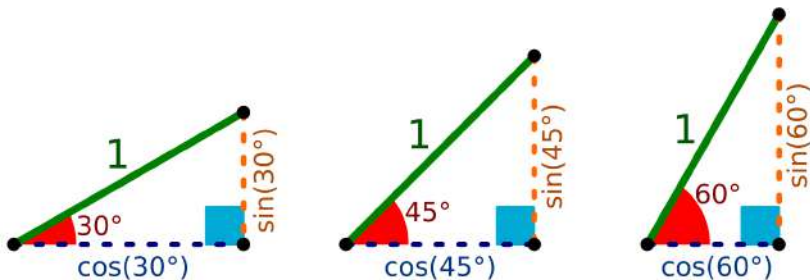


Aryabhata

Dès l'antiquité, les grecs étudiaient des problèmes de trigonométrie. Les fonctions **sinus** et **cosinus** que l'on connaît apparaissent en Inde vers 500 dans les textes d'Aryabhata.

La trigonométrie

Si on connaît les angles d'un triangle rectangle et la longueur de son hypoténuse, on connaît les longueurs de ses côtés et on peut définir ainsi des fonctions trigonométriques.



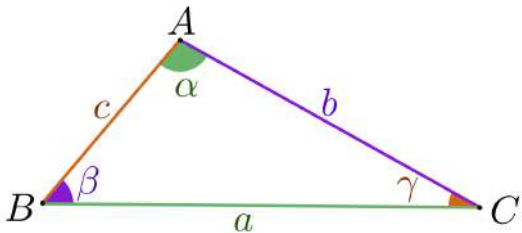
La trigonométrie

Leur étude est poursuivie par les savants arabes comme al-Ṭūsī (1201-1274, Mésopotamie) et al-Kashi (1380-1429, Asie centrale).

une table de tangentes

النسبة	
ساعات	دقائق
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5
6	6
7	7
8	8
9	9
10	10
11	11
12	12
13	13
14	14
15	15
16	16
17	17
18	18
19	19
20	20
21	21
22	22
23	23
24	24
25	25
26	26
27	27
28	28
29	29
30	30
31	31
32	32
33	33
34	34
35	35
36	36
37	37
38	38
39	39
40	40
41	41
42	42
43	43
44	44
45	45
46	46
47	47
48	48
49	49
50	50
51	51
52	52
53	53
54	54
55	55
56	56
57	57
58	58
59	59
60	60



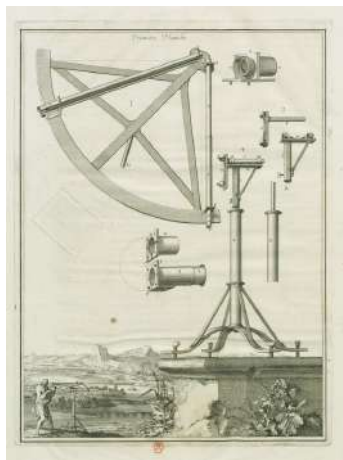


Loi des cosinus : $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

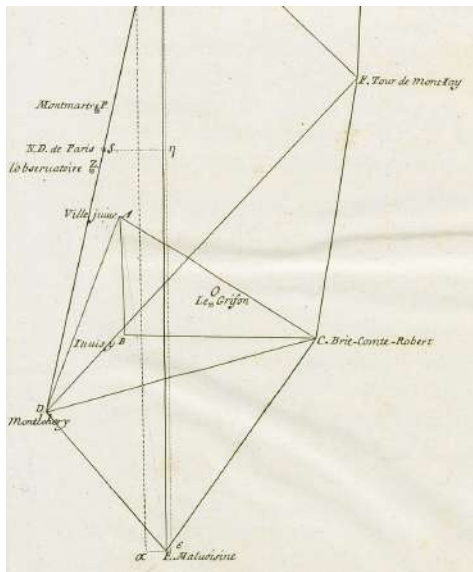
Loi des sinus : $\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$

La trigonométrie

En 1670, l'abbé Jean Picard utilise 13 triangles pour mesurer un degré de méridien entre Paris et Amiens et conclut que le rayon de la Terre est de 6 329 km (erreur < 1%).



La trigonométrie



$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}$$

I. TRIANGLE ABC.

Pour connoître le costé AC.

CAB. $54^{\circ} 4' 35''$.

ABC. $95^{\circ} 6' 55''$.

ACB. $30^{\circ} 48' 30''$.

AB. 5663 Toises de mesure actuelle.

Donc AC. 11012 Toises 5 pieds.

Et BC. 8954 Toises.

II. TRIANGLE ADC.

Pour DC. & AD.

DAC. $77^{\circ} 25' 50''$.

ADC. $55^{\circ} 0' 10''$.

ACD. $47^{\circ} 34' 0''$.

AC. 11012 Toises 5 pieds.

Donc DC. 13121 Toises 3 pieds.

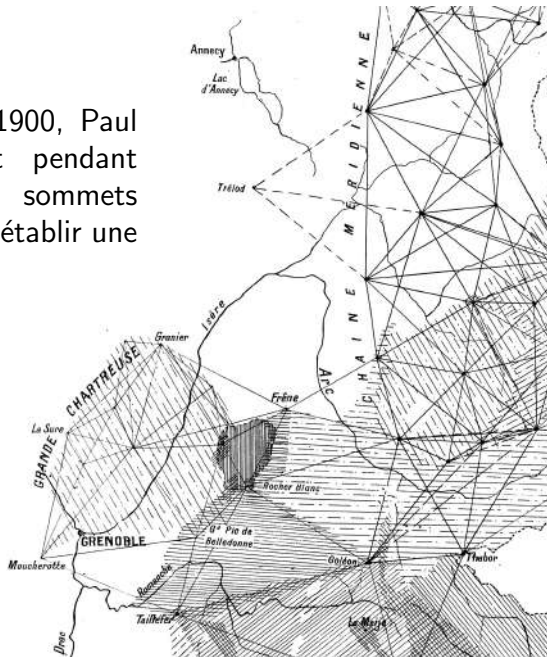
Et AD. 9922 Toises 2 pieds.

Mesurer la Terre, une aventure en soi :

- Pour vérifier la prédiction de Newton affirmant que la Terre est aplatie aux pôles, deux expéditions sont envoyées : une en Laponie (1736-1737) et l'autre en Équateur (1736-1744).
- Pour établir la longueur du mètre, Delambre et Méchain mesure le méridien entre Barcelone et Dunkerque pendant la révolution française.
- En 1828, le capitaine Durand a pour mission d'établir la carte du sud-est de la France. Avec deux guides locaux, ils font la première ascension du Pelvoux (3946 m).

La trigonométrie

Dans les années 1900, Paul Helbronner gravit pendant plusieurs étés les sommets des Alpes pour en établir une carte précise.



GRAND PIC DE LA MEJE. 3982, 3.



Station primaire du Réseau.

C'est certainement la plus difficile que j'ai osé entreprendre. J'ai constitué deux cordées, l'une composée de Devouassoud Gaspard, d'Auguste Mathonnet et de moi-même ; la deuxième composée de Baroz, Rey et Faure. Partis à 3^h40^m du matin, nous sommes au sommet à 8^h30^m. Le travail comporte, avec le tour d'horizon photographique, les observations à quatre répétitions de 20 signaux primaires du Réseau. La traversée des arêtes fut pénible pour les hommes chargés. La descente s'effectua sous l'orage que pouvait laisser prévoir l'atmosphère très pure mais très chaude de la matinée. (L'ascension a été décrite dans la *Revue Alpine* de mars 1909 : *En marge des carnets de ma quatrième campagne géodésique.*)

La trigonométrie

Un groupe de l'IREM de Grenoble a travaillé sur des activités d'arpentage réalisables à tous les niveaux. Du matériel est empruntable à l'IREM.



Les mondes étranges des mathématiciens

- 1 Géométrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens**
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion

Les mondes étranges des mathématiciens

Les géomètres du 19ème siècle se sont mis à explorer des mondes nouveaux.



Carl Friedrich Gauss
1777-1855
Allemagne



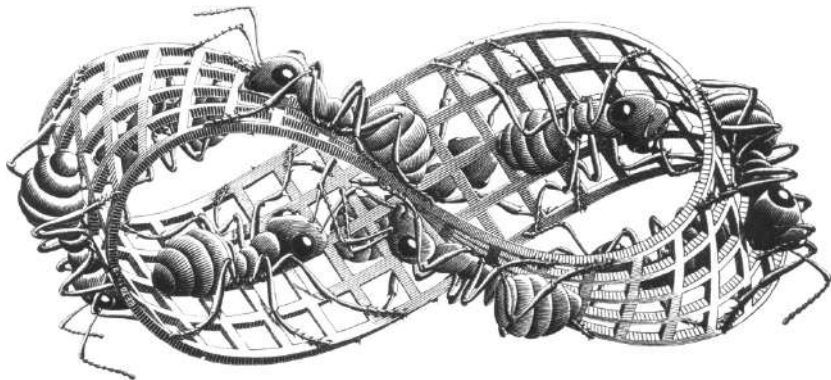
Bernhard Riemann
1826-1866
Allemagne



Henri Poincaré
1854-1912
France

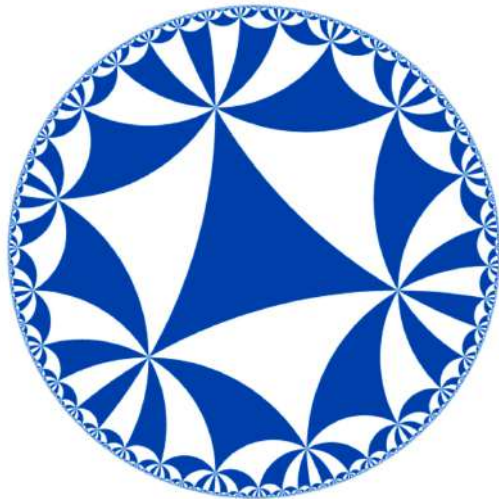
Les mondes étranges des mathématiciens

Des mondes sans orientation...



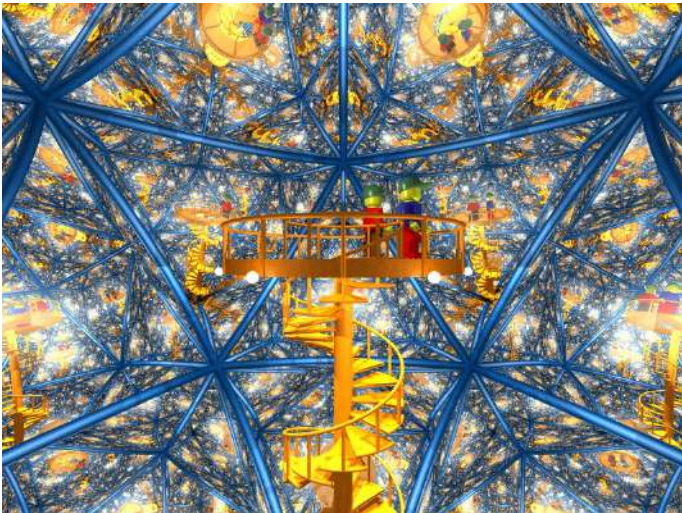
Les mondes étranges des mathématiciens

Des mondes où les triangles équilatéraux ont des formes étranges. . .



Les mondes étranges des mathématiciens

Des mondes en dimension plus grande que 3 ou avec des distances négatives. . .

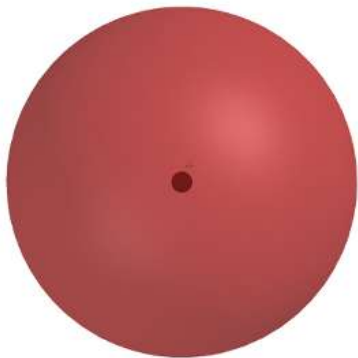


- 1 Géo-métrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS**
- 7 Conclusion

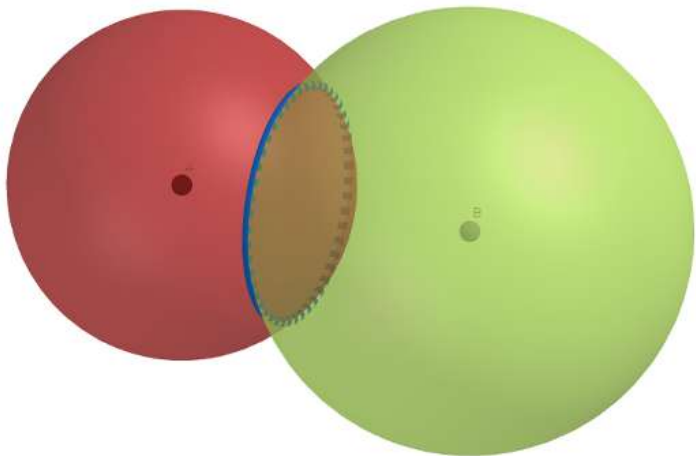
Le GPS

Pour se repérer grâce au **Global Positioning System**, un utilisateur reçoit des signaux radio de satellites qui communiquent leur position et l'heure de leur pendule atomique interne.

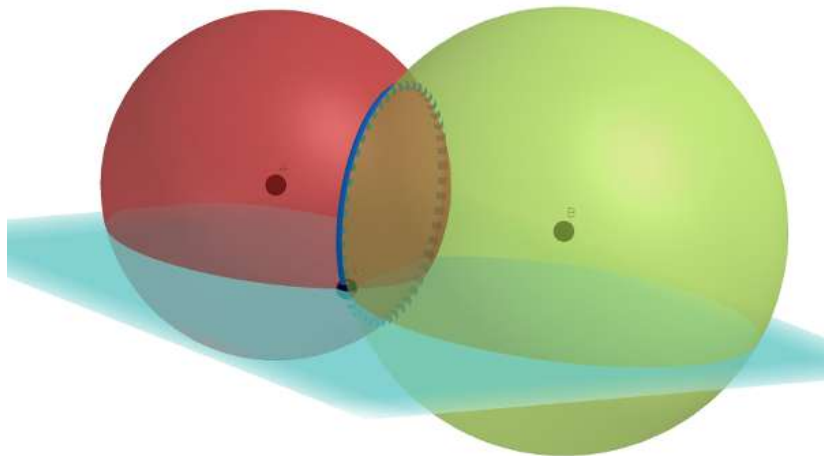




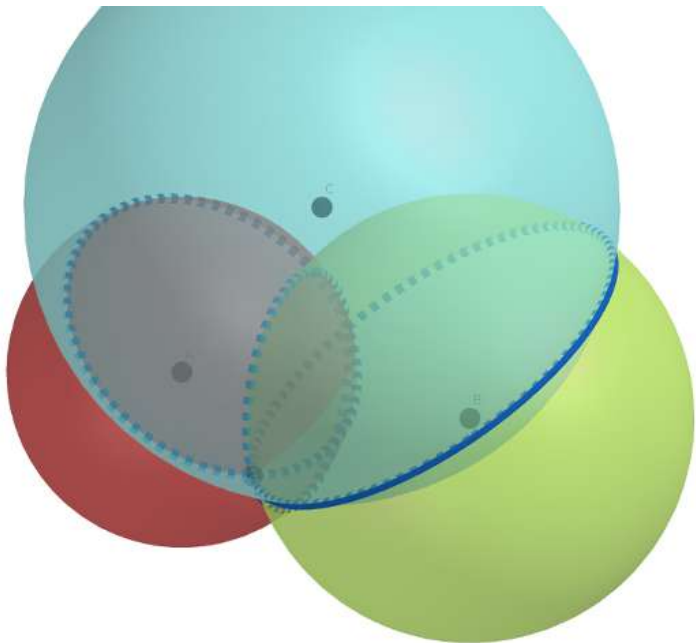
Le GPS



Le GPS



Le GPS



Vitesse de la lumière : 300.000 km/s.

Décalage d'une milliseconde : 300 km d'erreur !

Comme notre téléphone n'a pas d'horloge assez précise, il regarde plutôt la différence de temps entre les satellites : il lui en faut un de plus pour se positionner.

- 3 satellites : position sur une carte
- 4 satellites : position dans l'espace
- 5 satellites et plus : précision augmentée

Problème :

**les horloges des satellites se décalent de 38
microsecondes par jour ! ?**

Ceci correspond à une erreur de distance augmentant de plus de 11 km par jour.

Que se passe-t-il ?

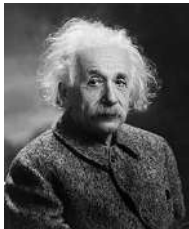
La théorie de la relativité est basée sur des espaces courbes de dimension 4 où la mesure d'une distance peut donner un nombre négatif !



Hendrik Lorentz
1853-1928
Pays-Bas



Henri Poincaré
1854-1912
France



Albert Einstein
1879-1955
Allemagne/USA



Emmy Noether
1882-1935
Allemagne/USA

Conclusion

- 1 Géométrie
- 2 Les bases de l'orientation
- 3 La taille de la Terre
- 4 La trigonométrie
- 5 Les mondes étranges des mathématiciens
- 6 Le GPS
- 7 Conclusion**

- Depuis des millénaires, la géométrie s'est développée pour mesurer et comprendre la Terre et les astres.
- Des méthodes mathématiques, comme la trigonométrie ont été développées pour répondre à des besoins pratiques.
- La géométrie moderne a été développée pour elle-même depuis 200 ans mais elle sert aujourd'hui dans de nombreuses applications concrètes comme le GPS.

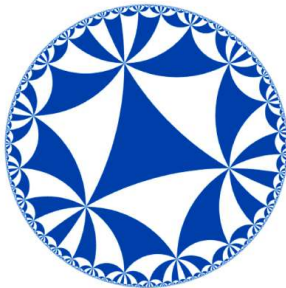
Conclusion

À l'Institut Fourier, des collègues continuent à travailler sur la géométrie abstraite. Par exemple, sur

« *les réflexions réelles, commutateurs et birapports dans l'espace hyperbolique complexe* »



Pierre Will



Conclusion

Aujourd'hui, la difficulté n'est pas de mesurer notre planète, mais de gérer une **surabondance de mesures**.

Les mathématiques de l'**assimilation de données** visent à prévoir le futur d'un système par des simulations numériques en utilisant des observations en temps réel pour ajuster la prévision au fur et à mesure.



observations
passées et présentes

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma \frac{\partial u}{\partial \sigma} - f(v - v_g) + \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_p + F_u = 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial v}{\partial \sigma} + f(u - u_g) + \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_p + F_v = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = -C_p \theta (1 + 0.85 q_v) \\ \frac{\partial p_s}{\partial t} = - \int_p^1 \left[\frac{\partial(p_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(p_s v)}{\partial y} \right] d\sigma \\ \frac{\partial \sigma}{\partial t} = \frac{1}{p_s} \left\{ \sigma \int_p^1 \left[\frac{\partial(p_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(p_s v)}{\partial y} \right] d\sigma - \int_p^1 \left[\frac{\partial(p_s u)}{\partial x} + \frac{\partial(p_s v)}{\partial y} \right] d\sigma \right\} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial \sigma} + \frac{\partial R_{net}}{\partial \sigma} + F_s + p_v = 0 \\ \frac{\partial q_v}{\partial t} + u \frac{\partial q_v}{\partial x} + v \frac{\partial q_v}{\partial y} + \sigma \frac{\partial q_v}{\partial \sigma} + F_q + p_q = 0 \end{array} \right.$$

modèles
mathématiques



statistiques

→ Assimilation de données

Conclusion

À Grenoble, au laboratoire Jean Kuntzmann, des collègues travaillent en particulier sur la **modélisation numérique de l'océan et l'atmosphère**, pour les prédictions météo, du climat ou des tsunamis.



Éric Blayo



Élise Arnaud



L'aventure continue...