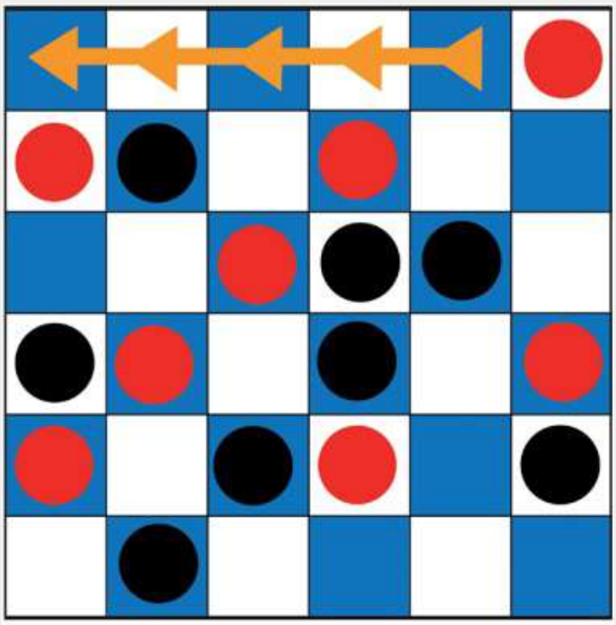
Chercher …

… Ecrire

Quelques travaux d'élèves
années 2022 et 2023



Association **MATh.en.JEANS** Institut Henri Poincaré 11, rue Pierre et Marie Curie 75005 Paris

Congrès 2023

Congrès 2022

Congrès Grenoble 2023

Brochure éditée par l'Association MATh.en.JEANS
Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris
www.mathenjeans.fr
Imprimé par Compo Offset, 78700 Conflans-Sainte-Honorine
Dépôt légal mars 2024

Sommaire

Hommage à Pierre Audin

MATh.en.JEANS, cette expérience si enrichissante que vivent ses actrices et acteurs, est née en 1989 : 35 ans déjà !

Nous devons cette magnifique idée à ses deux « Pierre fondateurs », Pierre Duchet et Pierre Audin.

Pierre Duchet nous a quittés trop tôt en 2018. Cette année Pierre Audin a disparu lui aussi, en mai 2023.

Pierre Audin a su transmettre non seulement l'idée mais aussi la force de son engagement durant ces 35 ans, se dépensant sans compter pour la création des ateliers Mej, pour les congrès, pour l'édition.

Avec énergie, avec humour, avec modestie, il a entrainé tous les acteurs et actrices de Mej : les jeunes, les enseignantes et enseignants, les chercheuses et chercheurs vers les mathématiques vivantes.

Éditorial

MATh.en.JEANS : une aventure vécue en France et ailleurs par de nombreux jeunes.

Ce sont des élèves de collèges et lycées, parfois des étudiant·es à l'université qui découvrent avec bonheur la “recherche mathématique”.

Ces jeunes travaillent en groupes, sont encadrés par des professeur·es, rencontrent des mathématiciennes et mathématiciens, et partagent leurs découvertes lors d'un congrès annuel.

Leur année de recherche trouve aussi un aboutissement par la communication écrite sous forme d'articles qui sont relus et validés par le Comité d'édition de MATh.en.JEANS, puis publiés sur le site de l'association.

Ce sont quelques-uns de ces travaux écrits que nous vous présentons ici.

Ils sont le fruit de recherches effectuées au cours des années scolaires 2021 - 2022 et 2022 - 2023, proviennent de plusieurs régions de France, et certains d’autres pays.

Ils ne sont pas sélectionnés en fonction de leur “valeur” d'écriture ou de recherche mais apportent le témoignage et la diversité de la vie de MATh.en.JEANS.

On y reconnaitra plusieurs domaines des mathématiques : géométrie, probabilités, tactiques de jeux …

Les imperfections et inévitables oublis que l'on peut y trouver sont signalés dans les notes d'édition.

Ces articles représentent une véritable production mathématique. Et nous espérons que vous, lectrices et lecteurs de cette brochure, trouverez du plaisir dans leur découverte.

Remercions ici tous ces jeunes autrices et auteurs des travaux présentés, sans oublier leurs enseignantes et enseignants, ainsi que les chercheuses et chercheurs qui les ont accompagné·es.

Et félicitons-les !

Couper le quadrillage

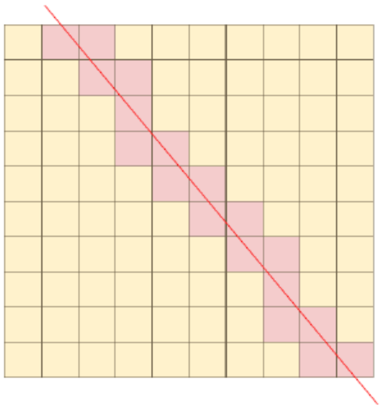
Année 2022 – 2023

Maïna Harscoet, Stéphane Ljutovac, Zoé Le Provost, Lou Roguet et Jules Solbes-Wilmet
élèves de 3ème

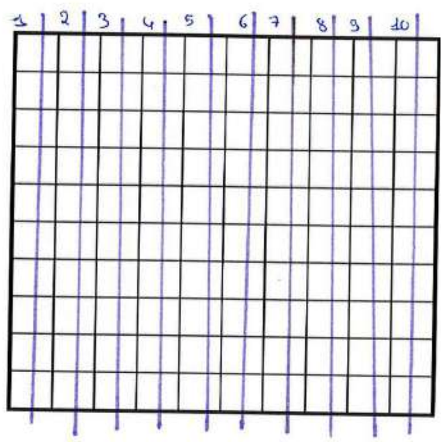
Établissement : Collège Hélène de Fonsèque, Surgères (17)
Encadré·es par : Romain Torchia
Chercheur **:** Gilles Bailly-Maître, Université de La Rochelle

1. Présentation du sujet

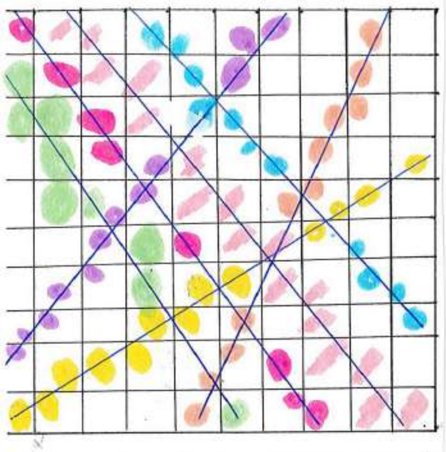
On considère un quadrillage 10×10.
Si on trace une droite, on colorie les cases qui sont coupées par la droite.
Combien de droites faut-il au minimum pour colorier toutes les cases du carré ? (1)



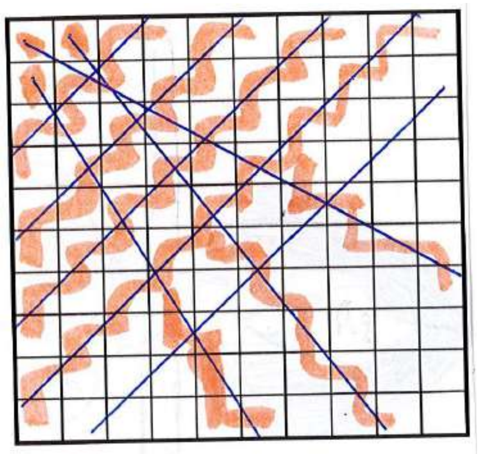
2. Premiers essais



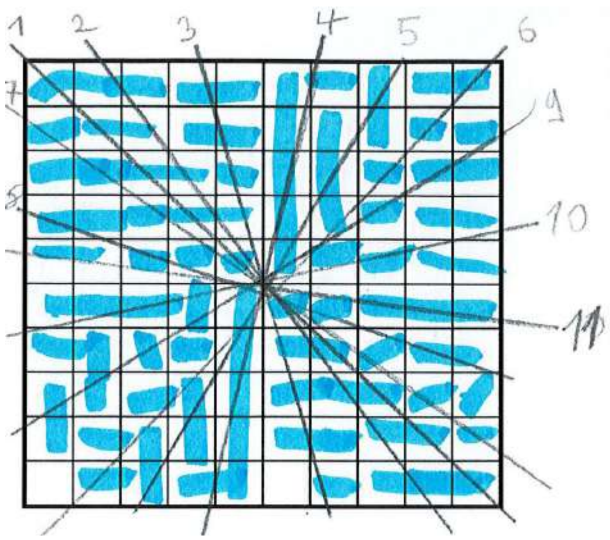
Nous avons commencé par tracer des droites parallèles à un côté du carré. Nous avons obtenu 10 droites. Notre objectif était donc de colorier le carré en moins de 10 droites.



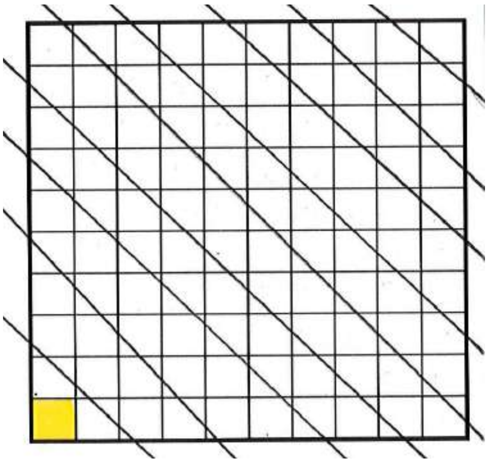
Grâce à ce schéma, nous avons conclu que, plus nos droites se croisent, plus on perd des carreaux.



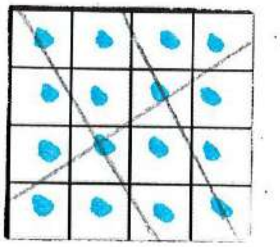
On a commencé à avoir une organisation, en mettant des droites parallèles en diagonale, tout en gardant des droites désorganisées.



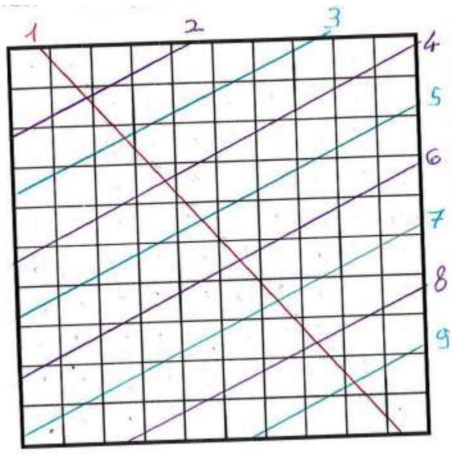
On a essayé avec la symétrie centrale, de nouveau sans succès, car le nombre de droites était trop important pour couvrir tous les carreaux. De plus, si on trace deux droites sécantes passant par le centre, on est obligés de passer par ces deux droites pour en tracer une autre, ce qui fait perdre des carreaux.



Ensuite nous avons commencé à faire des droites parallèles entre elles mais il restait toujours un carré non traversé par les droites une fois qu'on a eu fini de tracer 9 droites. Il fallait donc en tracer une de plus, donc 10 droites en tout.



Puis, on a travaillé sur des quadrillages plus petits : 4×4. On a finalement réussi à faire trois traits pour recouvrir la totalité des carreaux.



Finalement, nous avons réussi à faire seulement 9 droites pour traverser les 100 carreaux. C'est le minimum que nous avons réussi à faire.
En essayant de traduire proportionnellement un carré 4×4 en 10×10, nous n'avons pas abouti.

3. Des éléments de preuve

Nous n'avons pas réussi à démontrer que, dans le cas d'un carré 10×10, il faut au minimum 9 droites pour colorier toutes les cases du carré.
Néanmoins, dans le cadre de carré de dimensions plus petites, nous avons démontré que, pour un carré de côté n carreaux, il faut au minimum $n-1$ droites pour colorier toutes les cases du carré.

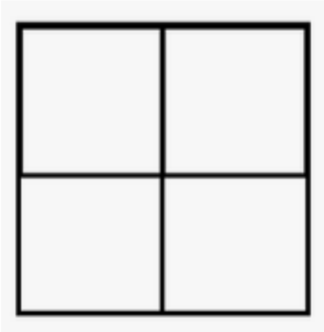
3.1. Le carré 2 x 2

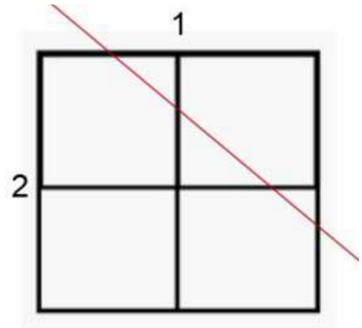
Nous avons utilisé la propriété suivante :

Propriété : une droite ne peut traverser une ligne du quadrillage qu'une seule fois.

Par exemple, sur le quadrillage 2×2 suivant, la droite rouge ne peut traverser qu'une seule fois les lignes du quadrillage 1 et 2. A partir du moment où l'on traverse une ligne, on touche un carreau. On y ajoute ensuite le carreau de départ et on obtient trois carreaux touchés sur quatre au maximum avec une seule droite.

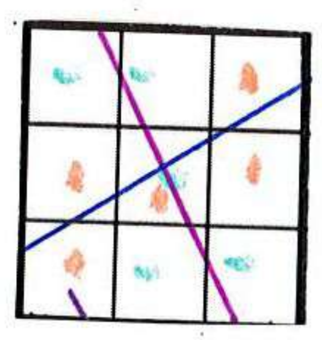
Donc, deux droites est le minimum que nous puissions faire avec un carré de 2×2 car il est impossible de réaliser le coloriage avec une seule droite.





3.2. Le carré 3 x 3

Sur le carré ci-dessous, nous avons réfléchi au nombre maximum de carreaux que nous pouvons colorier avec une droite. Dans ce carré, il y a 4 lignes de quadrillage donc une droite peut traverser au maximum 5 carreaux. Il est donc impossible de traverser tous les carreaux avec une seule droite. Nous avons réussi à colorier toutes les cases du carreaux avec deux droites. Deux droites est donc le minimum pour réaliser le coloriage.



3.3. Le carré 4 x 4

Sur un carré de 4 carreaux de côté contenant 16 carreaux en tout, il y a 6 lignes de quadrillages. Donc une droite tracée peut, au maximum, traverser 7 carreaux. En traçant une deuxième droite, traversant également ces 6 lignes, nous allons colorier 7 carreaux de plus. Grâce aux deux droites que nous avons tracées, nous pouvons donc traverser 14 carreaux au maximum. Cela ne recouvre pas l'intégralité du quadrillage (16 carreaux). Donc, le minimum de droites que nous devons tracer pour recouvrir les carreaux de ce quadrillage est 3 car nous avons réussi à colorier tous les carreaux avec 3 droites.

3.4. Le carré 5 x 5

Sur un carré de 5 carreaux de côté contenant 25 carreaux en tout, il y a 8 lignes de quadrillage.

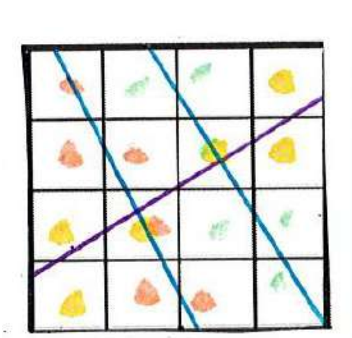
Donc une droite tracée en diagonale peut, au maximum, traverser 9 carreaux. En traçant une 2^e droite, traversant également ces 8 droites, nous allons colorier 9 carreaux aussi. Ces deux droites vont obligatoirement se croiser. En effet, une droite traversant un maximum de carreaux relie nécessairement deux coins en diagonale pour pouvoir traverser toutes les lignes du quadrillage. Ceci nous fera donc perdre un carreau traversé par les deux droites simultanément.

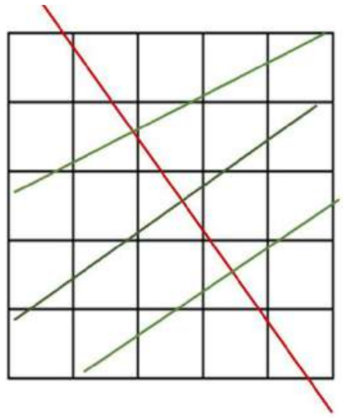
Nous avons donc la première droite qui traverse 9 carreaux et la deuxième qui en traverse 8 nouveaux. Avec ces deux droites, nous pouvons donc traverser 17 carreaux.

Par conséquent, ces deux droites vont se croiser au centre en croix. Et ce sont les deux seules droites qui peuvent traverser 9 carreaux. Donc, dorénavant, le maximum de carreaux traversés par une droite est 8. Cependant, une telle droite sera sécante aux deux premières. 6 nouveaux carreaux au maximum pourront donc être traversés.

Nous obtenons donc un total de $17 + 6 = 23$ carreaux traversés. (2)

Cela ne recouvre pas l'intégralité du quadrillage (25 carreaux). Donc, le minimum de droites que nous devons tracer pour recouvrir les carreaux de ce quadrillage est 4 car nous avons réussi à colorier tous les carreaux avec 4 droites.





Notes d'édition

(1) À noter : les cas très particuliers où une droite passe par un coin ou est confondue avec une ligne du quadrillage sont interdits.

(2) On voit sur la figure que la troisième droite (celle du haut ou celle du bas) est sécante avec les deux premières (proches des diagonales du carré). On perd donc une seule case, et le raisonnement tient quand même car 17+7=24 !

Exposé – Congrès Saclay 2022

Forum – Congrès Saclay 2023

Alcanes et isomères

Année 2021 – 2022

Thomas Mauline, Justine Nicolas, Baptiste Pouyanne, Thibault Vilbois, classe de seconde.

Établissements : Collège et Lycée Gaston Fébus, Orthez

Enseignant·es : Chantal Barneix et Alain Goyhetche

Chercheur : Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l’Adour.

1. Présentation du sujet

Nous avons étudié cette année les alcanes, molécule composée d’atomes de Carbone ainsi que d’Hydrogène. Les liaisons entre deux atomes sont simples, il n’y a pas de cycle de Carbone.
Nous avons essayé tout d’abord de trouver une formule générale donnant la composition des alcanes connaissant le nombre d’atomes de Carbone.
Un même alcane peut être décomposé en différents isomères : ces molécules ont la même composition mais les placements des atomes sont différents.
Nous avons essayé de compter ces isomères, en transformant ce problème de Chimie en un puzzle.
Nous exposerons nos résultats (simplifiés et partiels).

2. Texte de l’article

Partie 1 : Recherche de la formule générale des alcanes.

1/ Les composants.

Les atomes d’Hydrogène ne possèdent qu’une liaison, tandis qu’un atome de Carbone possède, lui, 4 liaisons.	Atome d’Hydro-gène		Atome de Carbone	

2/ Premières manipulations et remarques.

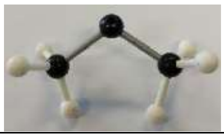
Nous avons essayé tout d’abord de construire différents alcanes puis avons à chaque fois noté leur formule. Par exemple, la figure ci-contre constituée de deux atomes de Carbone et six atomes d’Hydrogène se note C_2H_6 (Ethane).

A partir de cette molécule, nous avons essayé d’ajouter des atomes de Carbone. On peut distinguer deux cas :

2.1 Ajout d'un atome de Carbone en « fin de chaine » :

Etape	**Variations des atomes de Carbone**	**Variations des atomes d'Hydrogène**	**Illustration.**
On supprime un atome d'Hydrogène en bout de chaine.		-1	
On ajoute un atome de Carbone.	$+1$		
On complète les liaisons libres par des atomes d'Hydrogène.		$+3$	
Bilan	$+1$	$+2$	

Ajout d'un atome de Carbone dans une chaine :

Etape	**Variations des atomes de Carbone**	**Variations des atomes d'Hydrogène**	**Illustration.**
On casse la liaison entre deux atomes de Carbone. On ajoute alors un atome de Carbone.	$+1$		
On complète les liaisons libres avec des atomes d'Hydrogène		$+2$	
Bilan	$+1$	$+2$	

On remarque que dans les deux cas, si l'on ajoute un atome de Carbone, deux atomes d'Hydrogène seront ajoutés.

2.3 Premiers résultats, première formule :

Nous avons ensuite regroupé les formules des premiers alcanes afin d'essayer de trouver une formule :

Carbone	**Hydrogène**	**Formule**
1	4	CH_4
2	6	C_2H_6
3	8	C_3H_8
4	10	C_4H_{10}

Nous déduisons de ce tableau la formule : $\boldsymbol{C_nH_{2n+2}}$

<u>*2.4 Démonstration de la formule :*</u>

$\boldsymbol{Si\ n = 1}$ la formule C_1H_4 , $ou\ CH_4$ est bien la formule du premier alcane (méthane).

Supposons que la formule est vraie pour le rang p , c'est-à-dire que l'alcane contenant p Carbone a pour formule C_pH_{2p+2}. L'objectif est de démontrer que la formule de l'alcane contenant $p+1$ atomes de Carbone sera $C_{p+1}H_{2(p+1)+2}$

Prenons comme point de départ l'alcane : C_pH_{2p+2}. Nous avons remarqué que, lorsque l'on ajoute un atome de Carbone, dans tous les cas, deux atomes d'Hydrogène seront ajoutés.

Le nombre d'atomes de Carbone sera alors de $p+1$ et celui d'Hydrogène : $2p+2+2 = 2p+4$

Or $2(p+1)+2 = 2p+2+2 = 2p+4$.

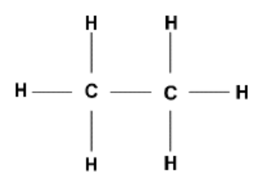
Donc la formule de l'alcane à $p+1$ atomes de Carbone est bien $C_{p+1}H_{2(p+1)+2}$.

La formule est donc démontrée (1) pour tout $n\ entier$.

Partie 2 : Différentes représentations d'un alcane.

1/ Première représentation.

Dans un premier temps, nous avons représenté sous la forme d'un schéma à deux dimensions les alcanes. La figure ci-contre est celle de l'éthane (vu précédemment).
Cette représentation est imparfaite, de plus, les angles formés par les liaisons ne sont pas égales à 90°.



Mais cette représentation est vite devenue inutilisable, lorsque nous avons augmenté le nombre de Carbone. Les schémas devenaient bien trop compliqués et deux représentations qui paraissaient différentes à première vue étaient en fait le même isomère.

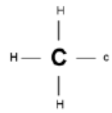
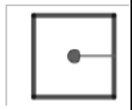
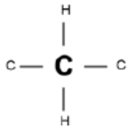
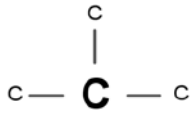
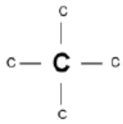
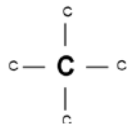
2/ Autres représentations.

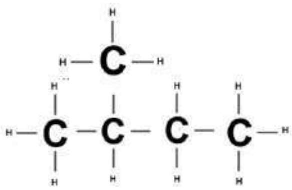
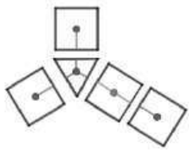
Nous avons eu ensuite l'idée de supprimer les atomes d'Hydrogène. En effet, les alcanes sont constitués uniquement d'atomes de Carbone et d'Hydrogène. Nous savons de plus qu'un atome de Carbone a toujours quatre liaisons. Si l'on dessine uniquement les liaisons entre Carbone, les liaisons non déssinées seront forcément celles avec des atomes d'Hydrogène.

Le représentation de l'éthane devient alors :

C —— C

Monsieur Cresson nous a alors proposé une troisième représentation. Les atomes de Carbone seront alors représentés sous la forme d'un puzzle. Les pièces seront des carrés ou des triangles équilatéraux. Les segments dessinés sur ces pièces représenteront alors le nombre de liaisons avec d'autres atomes de Carbone.

	Schéma 1 (atomes de Carbone et d'Hydrogène)	**Schéma 2 (uniquement les atomes de Carbone)**	**Schéma 3 : Puzzle**	**briques (nom)**
Une seule liaison avec un autre atome de Carbone :				b_1
Deux liaisons avec des Carbone :				b_2
Trois liaisons :				b_3
Quatre liaisons :				b_4

Par exemple, un isomère de l'alcane C_5H_{12} représenté :	Sera représenté sous la forme du puzzle suivant :
	

3/ Vocabulaire.

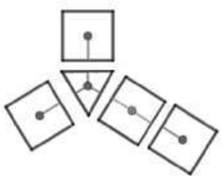
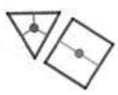
Dans toute la suite de l'article,

- Un élément du puzzle sera appelé une brique.
- Nous parlerons uniquement de liaisons entre atomes de Carbone.

Partie 3 : Le but de cette partie est de déterminer, connaissant le nombre d'atomes de Carbone, le nombre de puzzles possibles.

1/ Forme simplifiée du puzzle et définition des attaches.

Chaque branche d'un puzzle étant terminée par une brique de type b_1, nous avons décidé de supprimer ces briques de la représentation afin de la simplifier.

Par exemple, le puzzle  devient 

Les attaches correspondent aux emplacements libres de la figure simplifiée. Donc le nombre d'attaches n_1 est égal au nombre de briques b_1.

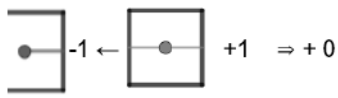
(2)

Propriété 1 : $n_1 = n_{Total} - n_4 - n_3 - n_2$

2/ Effets de l'ajout d'une brique sur le nombre d'attaches libres.

Dans toute la suite, on notera $n_{p,a}$ le nombre d'attaches d'un puzzle p.

Si on ajoute une brique b_2 :
Une attache libre est supprimée mais une attache libre est ajoutée,
le bilan est donc nul.

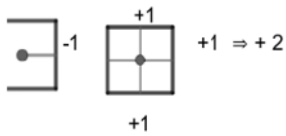


Propriété 2 : $n_{p+b_2} = n_{p,a}$

Si on ajoute une brique b_3 :
Une attache libre est supprimée mais deux attaches libres sont ajoutées. Au final, une attache est ajoutée.

Propriété 3 : $n_{p+b_3} = n_{p,a} + 1$

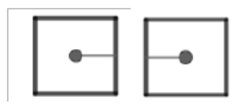
Si on ajoute une brique b_4 :
Une attache libre est supprimée mais trois attaches libres sont ajoutées.
Au final, deux attaches sont ajoutées.



Propriété 4 : $n_{p+b_4} = n_{p,a} + 2$

3/ Nombre minimal de briques b_2.

Comme nous l'avons vu précédemment, la plus petite molécule de plusieurs Carbone est C_2H_6. Cette molécule est représentée sous la forme du puzzle ci-contre, on peut en déduire que le nombre minimal de briques est 2.



Propriété 5 : *Dans une chaîne, le nombre minimal de briques b_1 est 2*

4/ Une méthode pour déterminer le nombre de puzzles possibles connaissant le nombre de Carbone.

Le nombre d'attaches (ou de briques b_1) varie entre 2 et le nombre total de briques.
La différence $n_1 - 2$ est égale aux nombres d'attaches apportées par les pièces b_3 et b_4 (3).

Une pièce b_3 ajoute une attache tandis qu'une pièce b_4 en apporte 2.
Il faudra alors chercher toutes les décompositions en sommes de 1 et de 2 la différence $n_1 - 2$

On peut donc déterminer toutes les possibilités du nombres de pièces b_3 et b_4.

Pour finir on calcule le nombre de pièces b_2.

5/ Exemple : $n_T = 5$

n_T	n_1	attaches libres	Décom-positions	b_3	b_4	b_2	commentaires
5	2	0		0	0	3	
5	3	1	1	1	0	1	
5	4	2	$1+1$	2	0	-1	impossible $n_2 = n_T - n_1 - n_4 - n_3 = -1$
5	4	2	$2+0$	0	1	0	$n_2 = 5 - 1 - 4 = 0$

6/ algorithme.

ligne 4 : On calcule le nombre d'attaches apportées par $b_3 et\ b_4$

Ligne 5 : chaque pièce b_4 apporte 2 attaches supplémentaires. Donc le nombre maximal de briques b_4 est égal au quotient de la division euclidienne de $libre$ par 2.

```
nbr = 0
print("n1      n2       n3       n4")
for n1 in range(2,nt):
     libre = n1-2
     max4 = libre//2
     for n4 in range(max4+1):
          n3 = libre-2*n4
          n2 = nt-n1-n4-n3
          if n2 >= 0 :
               print(n1,"     ",n2,"       ",n3,"       ",n4)
               nbr = nbr+1
print("Il y a ",nbr," puzzles possibles")
```

La boucle « for i in range (max4+1) » permet d'étudier tous les nombres possibles de pièces b_4
Pour chaque possibilité, on calcule le nombre de pièces b_3 et b_2. Si $b_2 \geq 0$ alors on a trouvé une possibilité, on peut l'afficher.

Partie 4 : Le but de cette partie est de déterminer, connaissant la composition d'un puzzle, le nombre de puzzles différents.

Nous savons donc maintenant, connaissant le nombre total d'atomes de Carbone, comment déterminer les décompositions possibles.

Mais connaissant une décomposition, comment déterminer le nombre de structures possibles (puzzles différents) ?

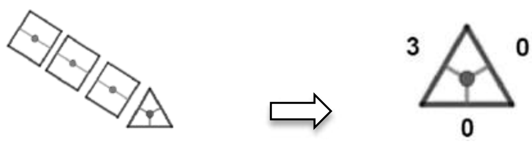
Nous n'avons pas trouvé une solution générale au problème (bien trop compliqué). Par contre, nous avons trouvé des solutions à des cas simples.

Problème 1 :
Déterminer le nombre de structures possibles
lorsque $n_1 = 3\,; n_3 = 1\ et\ n_2 \geq 0$

1/ Premier exemple : $n_2 = 3.$

1.1 notation :

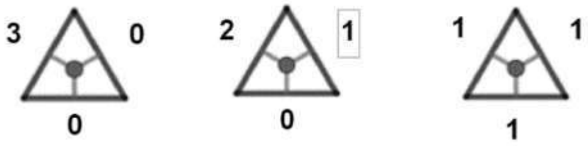
Afin de faciliter le comptage, on adoptera une autre notation :



Notation : 3-0-0

1.2 solutions :

Il y a trois possibilités :

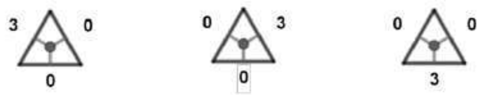


3-0-0 2-1-0 1-1-1

1.3 problème rencontré :

En cherchant différentes organisations dans différents cas, nous nous sommes rendus compte qu'il y avait parfois des « doublons » c'est-à-dire des décompositions équivalentes.

Par exemple :



3-0-0 0-3-0 0-0-3

Notre solution : Nous étudierons les triplets de nombres rangés dans l'ordre croissant. Dans le cas du dessus, seule la troisième solution sera conservée.

2/ Second exemple : $n_2 = 4$.

Les solutions :

0-0-4 0-1-3 0-2-2 1-1-2

3/ Recherche d'une solution générale.

Le problème se ramène à décomposer un entier (n) en somme de trois entiers (pouvant être nuls).
On note i, j, k les trois termes de la somme. On sait que $i \leq j \leq k$ donc on en déduit que $i \leq \frac{n}{3}$

Algorithme :

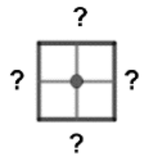
- i parcourt tous les entiers de 0 à sa limite $\frac{n}{3}$:
  - J prend pour première valeur i (car $j \geq i$)
  - Tant que $n - i - j \geq j$ (puisque $k = n - i - j \geq j$) :
    - Afficher le triplet (i, j, k)
    - j prend la valeur suivante $j + 1$

Programme Python :

```
nb = int(input("Quel nombre entier ?")

maxi = nb//3
cpmpteur = 0

for i in range (maxi+1):
    j = i
    while nb-i-j>= j:
        print(i, " , " ,j , " ; ", nb-i-j)
        j=j+1
        compteur = compteur+1

print("Il y a ", compteur, "décompositions possibles")
```

Nous avons utilisé la même méthode pour résoudre le problème suivant :

Problème 2 :
Déterminer le nombre de structures possibles
lorsque $n_1 = 4$; $n_4 = 1$ et $n_2 \geq 0$

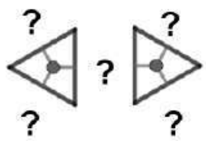


Programme Python :

```
nt=int(input("Nombre à décomposer ?"))

a1=a2=a3=a4=0
for a1 in range (0,nt//3+1):
    for a2 in range (a1,nt-a1):
        for a3 in range (a2,nt-a2):
            a4=nt-a1-a2-a3
            if (a4>a3):
                print(a1," ",a2," ",a3," ",a4)
```

Enfin, nous avons étudié un dernier problème :

Problème 3 :
Déterminer le nombre de structures possibles
lorsque $n_1 = 4$; $n_3 = 2$ et $n_2 \geq 0$



Cette fois, on associe deux briques b_3. On disposera les briques b_2 aux places marquées par les « ? »

Nous avons déterminé une stratégie :
1/ On fixe le nombre de briques b_2 situées entre les deux briques triangulaires.
2/ On répartit les autres briques sur les quatre « ? » restants.

Une brique a trois attaches. Une est utilisée (entre les deux triangles), on utilisera donc les deux autres attaches libres pour répartir les autres éléments. Le problème se ramène donc à déterminer toutes les partitions possibles d'un entier en somme de deux entiers.
Dans toute la suite, on notera $P(n, 2)$ le nombre de partitions de l'entier n en somme de deux entiers.

Comment calculer $P(n, 2)$?

Par exemple les partitions possibles de 6 sont $\begin{bmatrix} 0-6 \\ 1-5 \\ 2-4 \\ 3-3 \end{bmatrix}$, les partitions de 7 sont $\begin{bmatrix} 0-7 \\ 1-6 \\ 2-5 \\ 3-4 \end{bmatrix}$.

Afin de ne pas trouver de partitions « en double », nous avons décidé que le premier terme (nombre de gauche) devra toujours être inférieur ou égal au second (nombre de droite).

$$nombre_{gauche} \leq nombre_{droite}.$$

Par conséquent, le nombre de gauche devra toujours être inférieur ou égal à la partie entière du quotient du nombre par 2 :

$$n_{Gauche} \leq E\left(\frac{n}{2}\right)$$

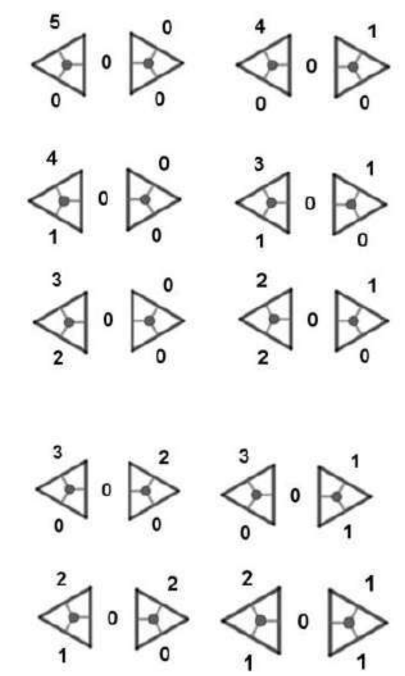
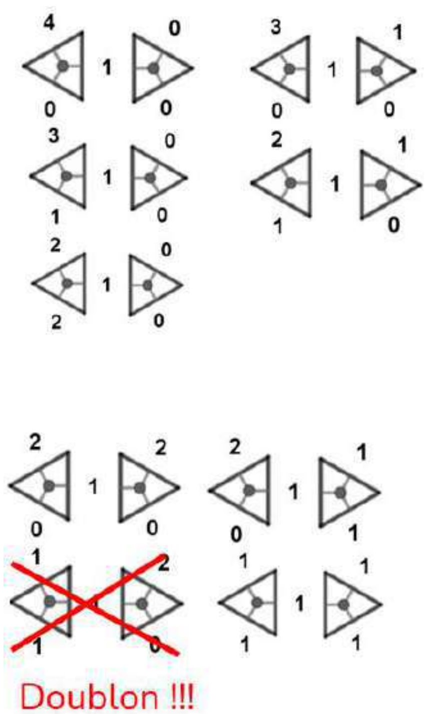
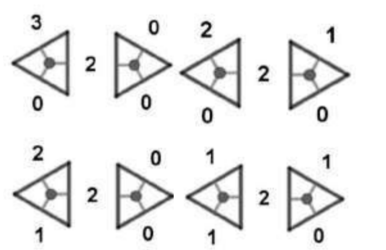
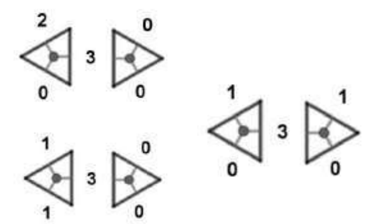
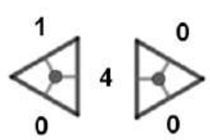
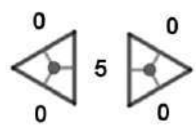
Si l'on compte tous les entiers de 0 à $E\left(\frac{n}{2}\right)$, on trouve $E\left(\frac{n}{2}\right) + 1$

Par exemple, de 0 à $E\left(\frac{6}{2}\right) = De\ 0$ à 3 , on compte 4 entiers et $E\left(\frac{6}{2}\right) + 1 = 3 + 1 = 4$

De 0 à $E\left(\frac{9}{2}\right)$ = De 0 à 4, on compte 5 entiers et $E\left(\frac{9}{2}\right) + 1 = 4 + 1 = 5$

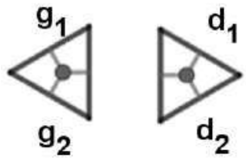
$$\boxed{P(n, 2) = E\left(\frac{n}{2}\right) + 1}$$

Prenons pour exemple : $nombre\ de\ b_3 : 2, nombre\ de\ b_2 : 5$

Si aucune b_2 entre les triangles	**1 brique b_2 entre les triangles**	**2 b_2 entre les triangles**
		 **3 b_2 entre les triangles** 
4 b_2 entre les triangles	**5 b_2 entre les triangles**	
		

Afin d'éviter les doublons comme dans l'exemple ci-dessus, nous avons déterminé des conditions :

$$g_1 + g_2 \geq d_1 + d_2$$
$$g_1 \geq g_2 \quad et \quad d_1 \geq d_2$$
$$g_1 \geq d_1$$



Ces conditions ne sont pas démontrées, nous les avons vérifiées sur différents exemples.
Nous n'avons pas réussi à associer la formule $P(n, 2)$ avec les règles ci-dessus afin de déterminer une formule donnant la solution au problème 3. On se rend compte qu'un problème qui parait simple est en fait très compliqué.

3. Conclusion

Pour conclure, nous avons d'abord cherché un lien entre les carbones et les hydrogènes, puis nous nous sommes intéressés à la composition des isomères et aux différents placements possibles dans une molécule.

Cette recherche nous a permis d'aborder un problème différent des mathématiques ''classiques'' et de réfléchir différemment, le tout en représentant nos idées clairement pour se faire comprendre. Nous nous sommes aussi rendu compte qu'un problème qui peut sembler simple se révèle parfois bien plus compliqué qu'on le pensait, mais même si l'on ne trouve pas toutes les solutions, l'important est de chercher.

Notes d'édition

(1) Ce type de démonstration est un appelé *raisonnement par récurrence*.

(2) n_{Total} est le nombre total de briques et n_i le nombre de briques b_i, pour $1 \leq i \leq 4$.

(3) Ces attaches sont appelées *attaches libres* dans le tableau et dans l'algorithme ci-dessous.

La vie d'un plancton

Année 2021 – 2022

Maxime Bakal, Donovan Charousset, Gabriel Gravel et Maxime Paralieu, élèves de 4e

Établissement : Collège Alain-Fournier, Orsay (91).
Enseignante : Florence Ferry
Chercheur : Olympio Hacquard, Laboratoire de Mathématiques d'Orsay

Le sujet

On considère un plancton qui se déplace verticalement dans la mer. Chaque jour, il ira soit d'une unité vers le haut, soit d'une unité vers le bas avec une probabilité de $1/2$. Le fond de la mer (au niveau 0) est recouvert de moules, prédatrices de planctons. La surface (au niveau a) est recouverte d'une nappe de pollution qui tue le plancton dès qu'il s'en approche. Sachant que le plancton part d'une position x comprise entre 0 et a, est-il possible que le plancton survive indéfiniment ? Au bout de combien de temps en moyenne sera-t-il tué ? Selon x, est-ce qu'il a plus de chances que ce soit par les moules ou par la pollution ?

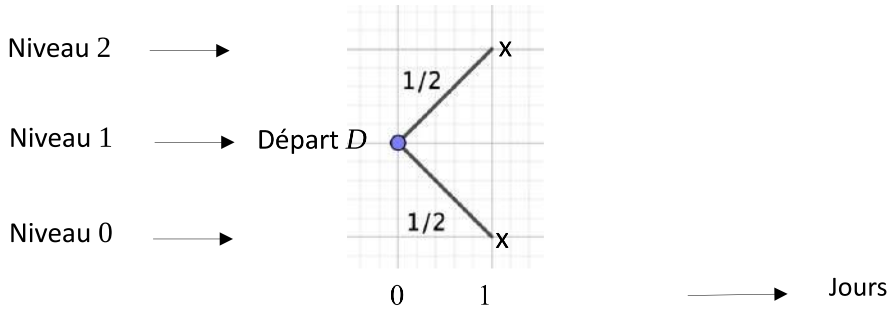
Nos résultats

Nous avons démontré que le plancton n'avait aucune chance de vivre quelque soit le nombre de niveaux entre 1 et 6 et son niveau de départ ; pour des niveaux plus grands nous pensons que le résultat reste le même mais ce n'est qu'une conjecture. Calculer le temps moyen de mort du plancton reste une question ouverte.

Notation. Dans la suite de l'article nous noterons $P(M_i)$ et $P(V_i)$ les probabilités respectives de mourir et de vivre à l'étape i. « x » au bout d'une branche des arbres de probabilités indiquera que le plancton meurt. Nous commençons notre étude par un petit nombre de niveaux que nous augmentons ensuite.

1. Trois niveaux

Pour comprendre comment évolue le plancton, traçons un arbre de probabilités. Au niveau 0, le plancton est mangé par les moules et au niveau 2, il meurt à cause de la pollution ; il démarre donc du niveau 1.

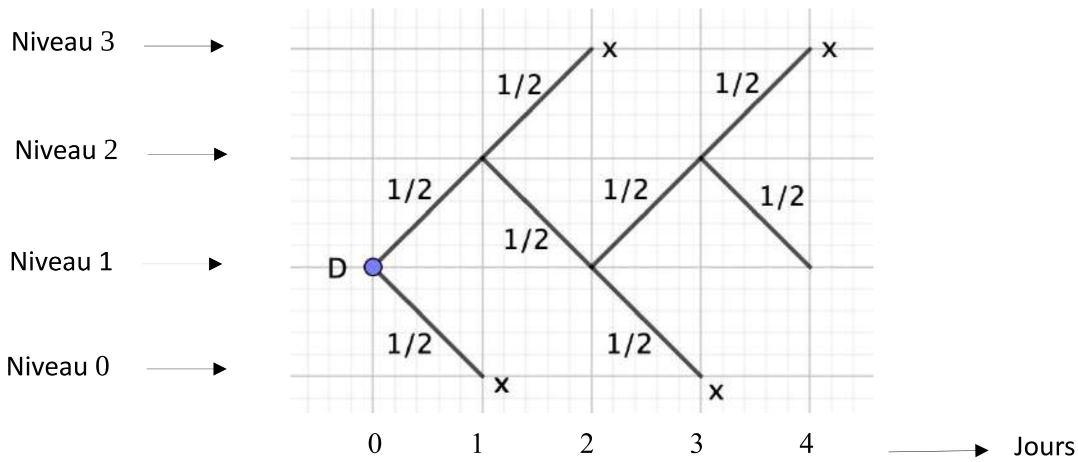


S'il monte, il arrive au niveau 2 et meurt de la pollution, s'il descend, il arrive au niveau 0 et est mangé par les moules. Donc au jour 1 : $P(M_1) = 1$ et $P(V_1) = 0$.

Conclusion : pour 3 niveaux, le plancton meurt le jour 1, il n'a aucune chance de vivre.

2. Quatre niveaux

Le plancton démarre du niveau 1.



Chaque jour, il n'y a qu'un seul chemin qui fait vivre le plancton, nous calculons donc la probabilité de vivre et nous en déduirons celle de mourir.

$$P(V_1)=\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad P(M_1)=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

$$P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2} \quad \text{donc} \quad P(M_2)=1-\frac{1}{2^2}=\frac{3}{4}$$

$$P(V_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3} \quad \text{donc} \quad P(M_3)=1-\frac{1}{2^3}=\frac{7}{8}$$

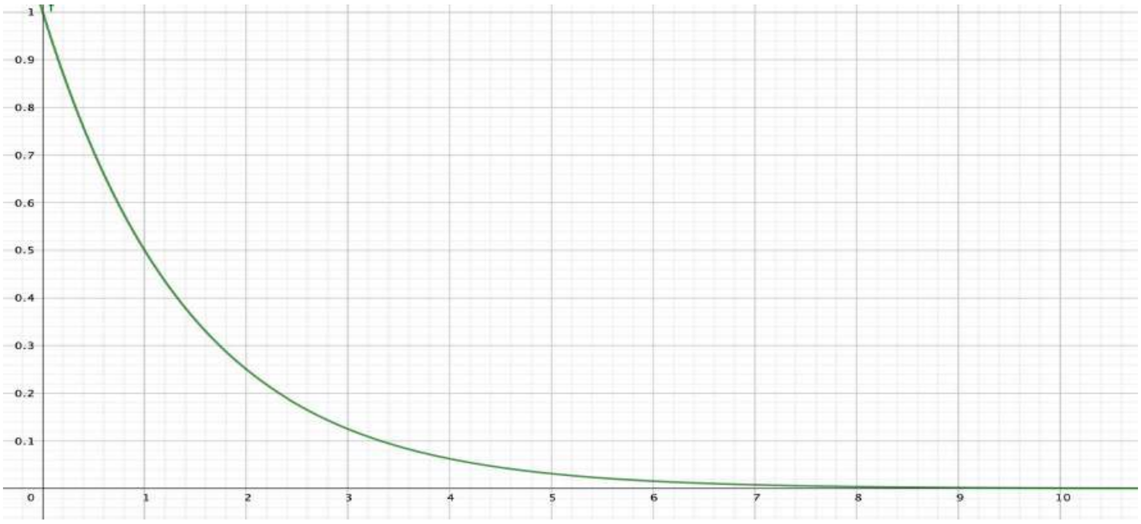
$$P(V_4)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{16}=\frac{1}{2} \quad \text{donc} \quad P(M_4)=1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{16}$$

Puisque chaque jour, un seul chemin mène à la vie, la probabilité de vivre est multipliée par $1/2$ chaque jour. Ainsi au jour *n :*

$$P(V_n)=\frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad P(M_n)=1-\frac{1}{2^n}$$

Pour visualiser l'évolution de la probabilité de vivre du plancton au fil des jours, nous avons réalisé un graphique avec en abscisses, le nombre de jours et en ordonnées, la probabilité de vivre.

Probabilité de vivre



Nombre de jours

Remarque. La courbe décroît très vite ; la probabilité de vivre du plancton se rapproche de zéro.

Voici quelques résultats qui confirment cette remarque :

$P(V_4) = 0{,}0625$ (6,25%) $P(M_4) = 0{,}9375$ (93,75%)

$P(V_7) = 0{,}007815$ (7,8%) $P(M_7) = 0{,}9921875$ (99%)

$P(V_{10}) = 0{,}0009765625$ (0,1%) $P(M_{10}) = 0{,}9990234375$ (99,9%)

Démonstration.

On a : $P(V_n) = \frac{1}{2^n}$

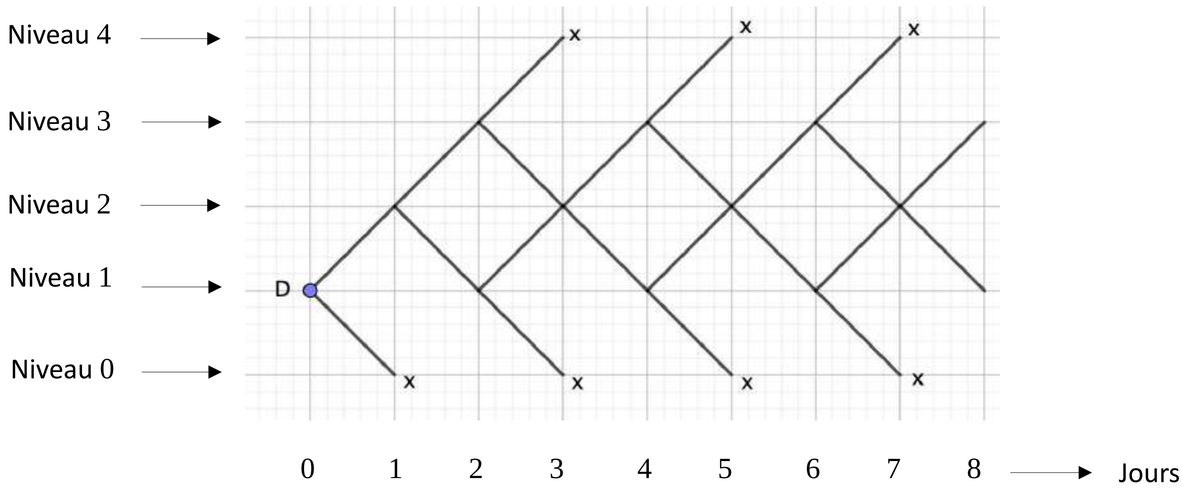
Lorsque n devient très grand, 2^n devient également très grand et la probabilité de vivre $\frac{1}{2^n}$ devient infime, elle se rapproche de zéro ; la probabilité de mourir, soit $1 - \frac{1}{2^n}$, elle, se rapproche donc de 1. Donc le plancton a toutes les chances de mourir, il ne vivra pas indéfiniment.

Remarque. Le plancton pourrait démarrer au niveau 2 et ce serait la même situation, car l'arbre est symétrique. Cependant, si le plancton part plus près des moules, on conjecture qu'il mourra plus rapidement en étant mangé par les moules que par la pollution, et inversement s'il part d'un niveau plus près de la pollution. (1)

Conclusion. Pour 4 niveaux, quel que soit le niveau de départ, le plancton mourra un jour. (2)

3. Cinq niveaux

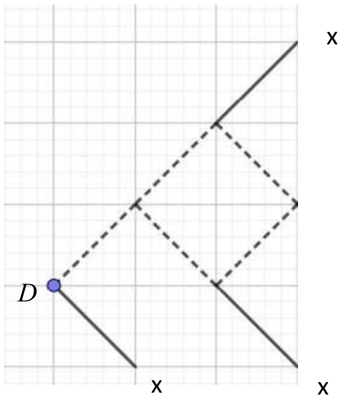
Supposons que le plancton démarre au niveau 1 ou au niveau 3 ; s'il démarre à 1, il mourra plus rapidement mangé par les moules et s'il part du niveau 3, la couche de pollution le tuera plus rapidement. Les probabilités se calculent de la même façon. Voici l'arbre de probabilités ; nous ne mettrons plus ces probabilités sur chaque branche (elle sont toutes de $1/2$).



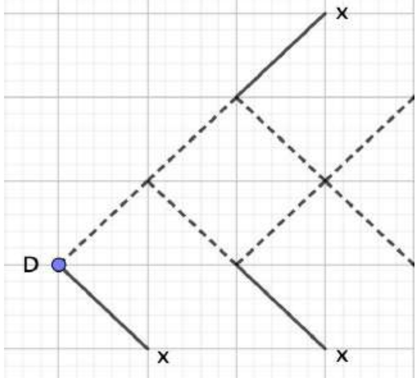
$P(V_1)=\frac{1}{2}$ (il n'y a qu'une branche sur les deux qui mène à la vie).

$P(V_2)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$ (Deux chemins mènent à la vie).

Au jour 3, observons l'arbre.



Les chemins menant à la vie au jour 3 sont indiqués en pointillés : il y en a deux comme à l'étape précédente donc $P(V_3)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2^2}$



Les chemins menant à la vie doublent au jour 4, il y en a quatre donc $P(V_4)=(\frac{1}{2})^4\times 4=\frac{1}{2^2}$

Au jour 5, le nombre de chemins reste le même donc $P(V_5)=(\frac{1}{2})^5\times 4=\frac{1}{2^3}$

Remarque. - Lorsqu'on est à un jour pair, il y a deux fois plus de chemins menant à la vie qu'au jour précédent.
- Lorsqu'on est à un jour impair, le nombre de chemins menant à la vie reste identique par rapport au jour précédent.

Ceci nous permet de généraliser la probabilité de vivre au jour n. Soit k un entier strictement positif.

- Au jour $n = 2k$, il y a 2^k chemins menant à la vie : $P(V_{2k})=(\frac{1}{2})^{2k}\times 2^k=\frac{1}{2^k}$

- Au jour $n = 2k + 1$, il y a encore 2^k chemins menant à la vie : $P(V_{2k+1})=(\frac{1}{2})^{2k+1}\times 2^k=\frac{1}{2^{k+1}}$

Conclusion. Lorsque k devient très grand, les probabilités de vivre $\frac{1}{2^k}$ et $\frac{1}{2^{k+1}}$ se rapprochent de plus en plus de 0 et donc le plancton mourra très certainement un jour. (3)

Remarque. Pour 5 niveaux, si on démarre au niveau 2, le calcul des probabilités sera le même avec un décalage au début.

Ainsi :

$$P(V_1)=1$$
$$P(V_2)=(\frac{1}{2})^2\times 2=\frac{1}{2}$$
$$P(V_3)=(\frac{1}{2})^3\times 2^2=\frac{1}{2}$$
$$P(V_4)=(\frac{1}{2})^4\times 2^2=\frac{1}{2^2}$$
$$P(V_5)=(\frac{1}{2})^5\times 2^3=\frac{1}{2^2}$$

Avec des remarques identiques sur le nombre de chemins qui double ou reste identique suivant le jour, on peut généraliser : pour k entier strictement positif,

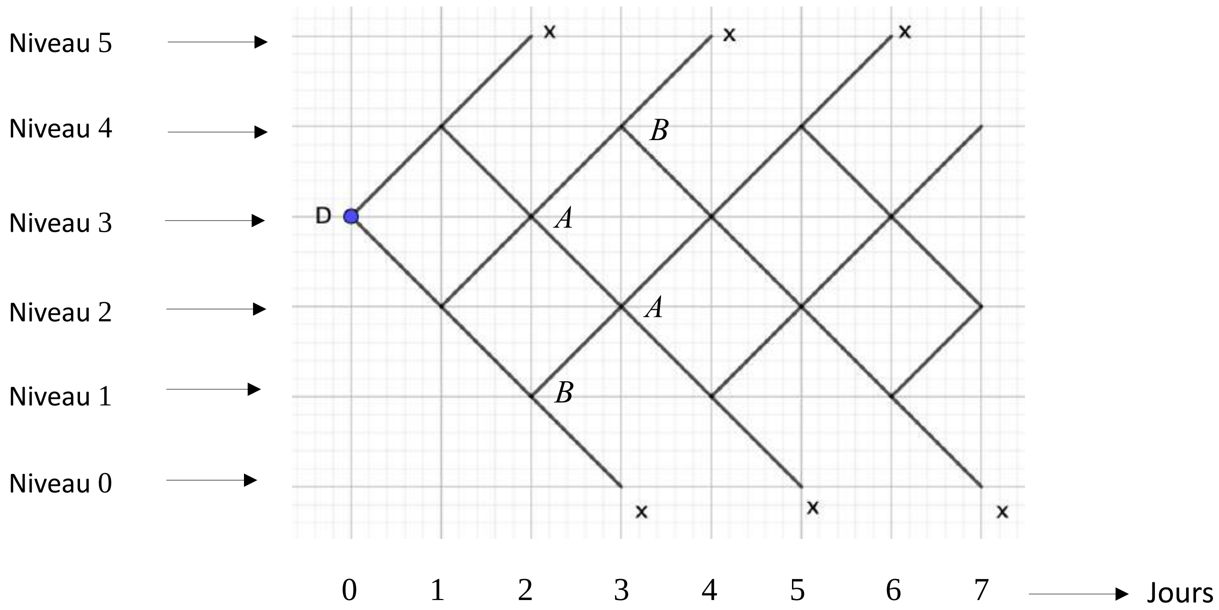
$$P(V_{2k})=\frac{1}{2^{2k}}\times 2^k=\frac{1}{2^k} \quad \text{et} \quad P(V_{2k+1})=(\frac{1}{2})^{2k+1}\times 2^{k+1}=\frac{1}{2^k}$$

La conclusion est donc la même, cette probabilité se rapproche de 0 lorsque k devient grand.

Conclusion. Pour 5 niveaux, quel que soit le niveau de départ du plancton, celui-ci mourra un jour. (4)

4. Six niveaux

Nous commençons par considérer un départ à deux ou à trois, les calculs de probabilités seront identiques



On remarque qu'il n'y a que deux sortes de nœuds différents : ceux qui sont l'arrivée de deux chemins (notés A) et ceux qui ne sont l'arrivée que d'un chemin (notés B), comme vous pouvez le voir sur l'arbre ci-dessus. Chaque jour, à partir du jour 2, il y a un nœud A et un nœud B.

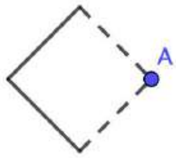
On compte, à chaque étape, le nombre de chemins menant à la vie.

Jour	Nombre de chemins
1	2
2	3
3	5
4	8
5	13
6	21

Les nombres de chemins vers la vie semblent suivre la suite de Fibonacci (à part les deux premiers termes qui en sont absents).

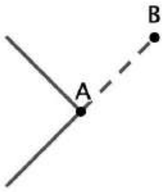
On peut démontrer ce résultat grâce à la remarque sur les nœuds A et B ci-dessus.
Un jour donné (supérieur à 1), il y a un nœud A et un nœud B. Pour connaître le nombre de chemins menant à la vie ce jour là, il faut ajouter ceux qui arrivent en A avec ceux arrivant en B.
– Le nombre de chemins menant à la vie qui arrivent à un nœud de type A correspond exactement au nombre de chemins menant à la vie à l'étape précédente. En effet, à l'étape précédente, une seule branche se rajoute à chaque chemin de vie.

Illustration :



– Le nombre de chemins menant à la vie qui arrivent à un nœud de type B correspond au nombre de chemins menant à la vie arrivant d'un nœud de type A à l'étape précédente, ce qui, d'après ce qu'on vient de dire correspond exactement au nombre de chemins menant à la vie à l'étape précédente.

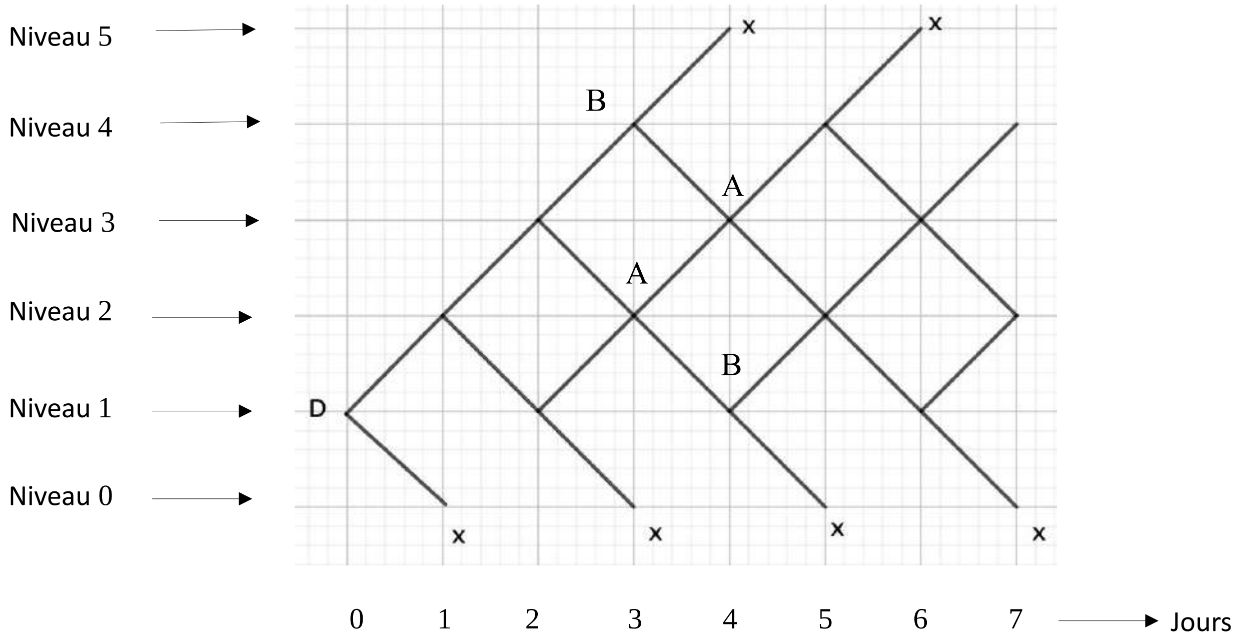
Illustration :



Donc le nombre de chemins suit bien la suite de Fibonacci et on peut donc poursuivre notre tableau et calculer les probabilités pour le plancton de rester en vie en augmentant le nombre de jours.

Jour	Nombre de chemins vers la vie	Calcul de la probabilité de vie	Probabilité de vie
1	2	$\frac{1}{2}\times 2$	1
2	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 3$	$\frac{3}{2^2}$
3	5	$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 5$	$\frac{5}{2^3}$
4	8	$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 8$	$\frac{8}{2^4}$
5	13	$\left(\frac{1}{2}\right)^5\times 13$	$\frac{13}{2^5}$
6	21	$\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 21$	$\frac{21}{2^6}$
7	34	$\left(\frac{1}{2}\right)^7\times 34$	$\frac{34}{2^7}$
8	55	$\left(\frac{1}{2}\right)^8\times 55$	$\frac{55}{2^8}$
9	89	$\left(\frac{1}{2}\right)^9\times 89$	$\frac{89}{2^9}$
10	144	$\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\times 144$	$\frac{144}{2^{10}}$

La probabilité de vie est le produit du nombre de chemins par $1/2$ élevé à la puissance correspondant au nombre de jours. Le numérateur augmente mais on conjecture que le dénominateur augmente beaucoup plus vite que lui, car même si le numérateur augmente selon la suite de Fibonacci, le dénominateur augmente avec des puissances de 2, ce qui va beaucoup plus vite. Donc la probabilité de vivre se rapproche de 0 et donc le plancton mourra un jour.
Maintenant, on passe à un arbre toujours à 6 niveaux, mais avec un départ à 1 ou à 4.



Remarque. Le calcul du nombre de chemins est le même ainsi que le calcul des probabilités.

Étape	Nombre de chemins menant à la vie	Probabilité de vie
1	1	$\frac{1}{2}$
2	2	$\left(\frac{1}{2}\right)^2 \times 2 = \frac{1}{2}$
3	3	$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \times 3 = \frac{3}{8}$
4	5	$\frac{5}{2^4}$
5	8	$\frac{8}{2^5}$
n	k	$\frac{k}{2^n}$

Le même raisonnement que le précédent s'applique ici : le dénominateur augmente plus vite que le numérateur donc la probabilité de vivre tendra vers 0 et le plancton mourra un jour.

5. Conclusion

Au delà de 6 niveaux, les arbres et les calculs sont devenus fastidieux. Nous conjecturons que le principe reste le même :
- à chaque étape, il y a deux sortes de nœuds (chaque étape n'a pas forcément les mêmes nœuds qu'à l'étape précédente) ; par exemple, pour sept niveaux avec un départ au niveau 2, à partir du jour 3, les jours pairs, il y a deux nœuds de type A et les jours impairs, deux nœuds de type B et un nœud de type A et nous pouvons donc calculer le nombre de chemins un jour n donné en fonction des nombres de chemins trouvés aux deux étapes précédentes ; ce calcul est une somme. Ce nombre de chemins, qui sera le dénominateur de la probabilité de vie calculée, augmente donc.
- Le dénominateur sera une puissance de 2 qui augmentera (ce n'est pas une croissance stricte) en fonction du nombre de jours.

Le dénominateur augmentera plus vite que le numérateur et donc le plancton mourra un jour quelle que soit la configuration de départ, nombre de niveaux et niveau de départ du plancton.

La dernière question posée, qui était « Au bout de combien de temps en moyenne le plancton sera-t-il tué ? » reste une question ouverte.

Notes d'édition

(1) Pour répondre à cette conjecture, on pouvait voir sur l'arbre de probabilités qu'effectivement, si le plancton démarre au niveau 1 (donc plus proche des moules) alors le plancton meurt à l'étape 1 mangé par les moules avec probabilité $1/2$. Alors qu'une mort liée à la pollution ne peut se produire qu'à partir de l'étape 2 (donc « plus tard »). Inversement si le plancton démarre à l'étage 2 il meurt à l'étape 1 à cause de la pollution avec la probabilité $1/2$ tandis qu'une mort liée aux moules ne peut arriver qu'à partir de l'étape 2.
Pour pousser l'étude plus loin, on aurait aussi pu faire le même type d'étude que lors du calcul de probabilité de survie, en étudiant les probabilités de mort, celle liée à la pollution et celle liée aux moules.

(2) Ajoutons une petite nuance : le plancton mourra un jour avec **probabilité 1,** ce qui ne veut pas exactement dire que le plancton mourra un jour.

(3) Ceci pour les cas où le plancton démarre à hauteur 1 ou à hauteur 3, les calculs étant similaires.

(4) Dans le cas où le plancton commence au niveau 2 (donc au « milieu »), on peut remarquer que le plancton meurt à l'étape 2 mangé par les moules avec la même probabilité qu'il meurt à l'étape 2 à cause de la pollution.

Congrès Saclay

Présentation à la fête de la science

Les Dames berrichonnes

Année 2021 – 2022

Aymeric Agard, Mélusine Dagois, Marc Desiaume, Maïawella Feve,
Nassim Ghemid, Evan Le Roux, Marguy Maboungou-Nkoula, Maxime Thirot,
élèves en classes de Seconde et de Première.

Établissement : Lycée Marguerite De Navarre, BOURGES
Encadré·es par : Olivier Créchet, Nathalie Herminier
Chercheur : Benjamin Nguyen, INSA Centre-Val de Loire.

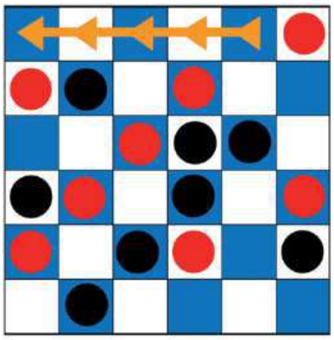
1. Présentation du sujet

Le jeu des Dames berrichonnes est un jeu de plateau se jouant de 2 à 4 joueurs, sur un damier de 6×6 cases. Une manche se déroule en deux étapes :

Dans un premier temps, on place nos pions sur le damier à tour de rôle jusqu'à ce que ce dernier soit entièrement rempli.

Puis, on retire les pions à tour de rôle en comptabilisant les points. Chaque pion retiré rapporte autant de points qu'il y avait de cases vides dans un sens (horizontal ou vertical) à partir de ce pion.

Il y a autant de manches que de joueurs et on fait tourner l'ordre de commencement à chaque manche.



Ici, le pion rouge en haut à droite du damier peut rapporter 5 points.

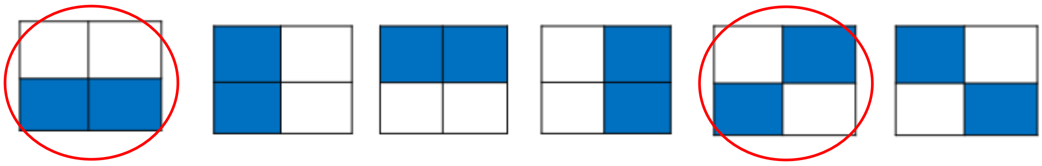
Nous avons cherché à trouver des stratégies gagnantes pour ce jeu dans le cas de parties à 2 joueurs. Nous avons trouvé un taux de victoire de plus de 90% pour le joueur 1 lorsqu'il dispose les pions sur les bords du damier.

2. Premières hypothèses

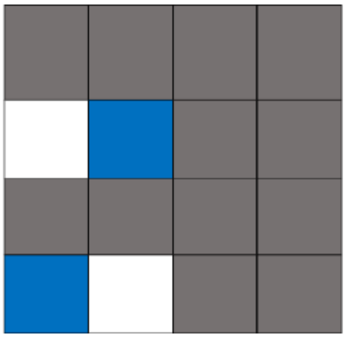
Dans toute la suite nous nous sommes intéressés à des parties à $\mathbf{2}$ joueurs. Par commodité les pions ne sont pas représentés : les cases occupées par le joueur $\mathbf{1}$ sont coloriées en bleu et celles occupées par le joueur $\mathbf{2}$ sont en blanc.

Pour essayer de comprendre le jeu sur un damier 6×6, on a essayé de simplifier le problème sur un damier plus petit.

Tout d'abord sur un damier 2×2 nous avons compté le nombre de façons différentes de disposer les pions. Nous avons trouvé $\binom{4}{2} = 6$ combinaisons. En enlevant les symétries, il n'y a plus que 2 possibilités (entourées en rouge). Dans tous les cas, le joueur 1 n'aura aucun point lorsqu'il retire son premier pion alors que le 2ème joueur en aura 1. Puis en retirant son deuxième pion le joueur 1 aura 1 point et le joueur 2 marquera également 1 point. Le joueur 1 perd donc toujours 2 à 1.

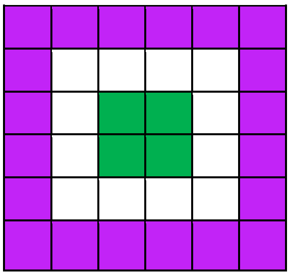


Puis sur un damier 4×4, les possibilités sont là bien trop nombreuses pour être toutes testées puisqu'il y a $\binom{16}{8}$combinaisons soit 12870 possibilités (en comptant les symétries). Nous avons donc mis en avant des morceaux de dispositions simples de ce damier. Telles que cette fin de partie : Ici, le 1er joueur perd dans tous les cas, puisque s'il commence par enlever le pion au milieu ou celui de gauche il ne marquera que 2 points donnant l'occasion au joueur 2 d'en marquer 3 se retrouvant donc avec un écart de 1 point, ce qui causera sa défaite étant donné que par la suite les 2 joueurs peuvent marquer 3 points.



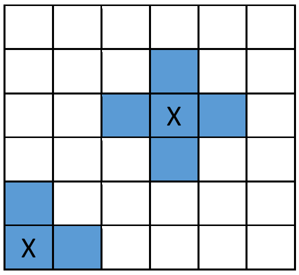
Nous avons après cela repris le 6x6 ce qui nous a permis, lors de parties jouées, de faire des hypothèses telles que :

- le joueur 2 semble avantagé



- Le plateau peut être fractionné en 3 parties. La zone externe (en violet) qui permettrait le gain d'un grand nombre de points, la zone centrale (en vert) qui permettrait d'avoir une bonne défense et la zone médiane (en blanc) qui serait un bon compromis.

- Les pions que nous appelons « isolés » mettraient en difficulté l'adversaire. Un pion isolé est un pion uniquement entouré de pions de la même couleur que lui. (voir la partie 4)

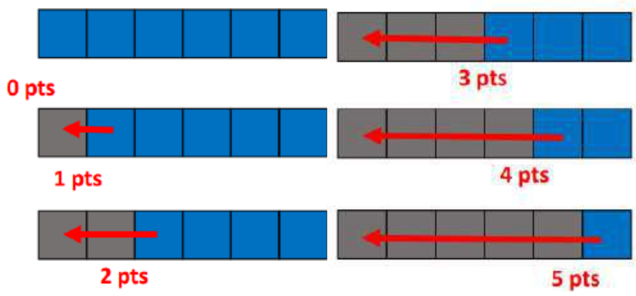


Ci-contre, les pions signalés par une croix sont des pions isolés.

Il y a un grand nombre de dispositions, on a trouvé $\binom{36}{18}$combinaisons soit plus de 9 milliards en comptant les symétries.

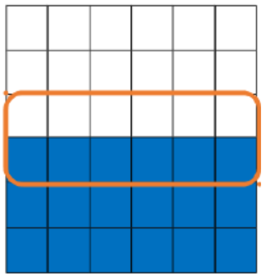
3. Calcul des points que peut rapporter une ligne de pions de même couleur

Pour calculer le nombre de points gagnés en une ligne on considère une ligne remplie de pions :
$0 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$. On est donc assuré, si on enlève le pion à côté d'une case libre (à part lors du 1er tour) de gagner 15 points avec une ligne entièrement remplie de nos pions. Le nombre de points est indépendant du choix du premier pion.

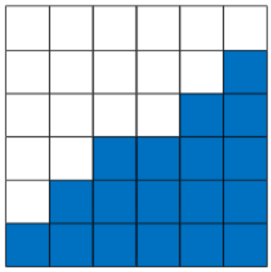


4. Etude des pions isolés

Nous avons décidé de tester ce qui se passerait si chaque joueur décidait d'avoir le maximum de pions isolés. Ainsi, seuls 6 pions au minimum sont en contact avec ceux de l'adversaire. On décide d'analyser une partie avec la disposition A (les résultats avec la disposition B sont les mêmes).



A. Configuration horizontale

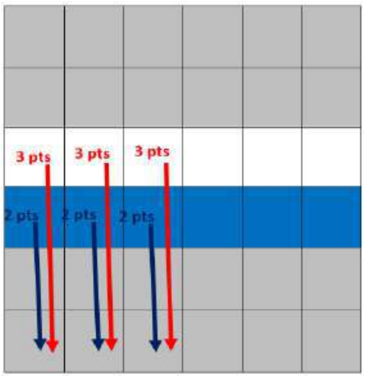


B. Configuration en diagonale

La stratégie est de ne pas jouer dans la zone orange (la frontière) pour ne pas laisser de points à l'adversaire jusqu'à ce qu'il ne reste plus que les pions de la frontière.Dans cette phase les deux joueurs marquent 31 points chacun (voir partie 3) : 15 points pour la première ligne plus 16 points pour la deuxième ligne car le premier pion marquera 1 point et non zéro.

Lorsque les joueurs vont commencer à retirer des pions de la frontière, le joueur 1 va marquer 2 points avec ses trois premiers pions tandis que le joueur 2 va marquer 3 points avec ses trois premiers pions. Pour la fin de la partie, les deux joueurs marquent le même nombre de points ($3 + 4 + 5 = 12$). Le joueur 2 va gagner 52 à 49 face au joueur 1.

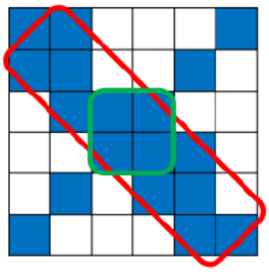
Cependant, si les deux joueurs utilisent la même stratégie lors de la 2ème manche (où l'ordre de passage est inversé) cela reviendra à un match nul. Les pions isolés permettent de ne pas laisser de points à l'adversaire mais si les deux joueurs font un maximum de pions isolés, cela mène à un match nul



5. Premières stratégies

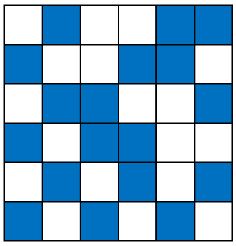
Par la suite nous avons joué plusieurs fois entre nous et avons découvert des stratégies que nous trouvons avantageuses :

- La première, celle dite des diagonales, consiste à disposer les pions le long des diagonales du damier tout en prenant le contrôle de la zone centrale. S'il reste des pions une fois les diagonales prises, il faut mettre des pions à côté des diagonales comme sur celle entourée en rouge. Le but est de bloquer l'adversaire en traversant le damier mais aussi de marquer des points en étant aux extrémités du damier.



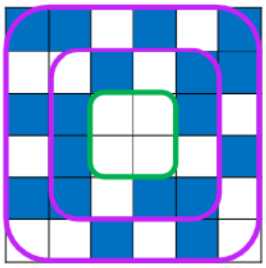
Technique 1 : exemple si on joue en 1er ou en 2ème

- La deuxième technique, dite des 3 pions, consiste à mettre 3 pions par ligne et par colonne. Cependant, il ne faut pas regrouper les pions au même endroit et ne pas mettre deux pions qui sont sur un bord du plateau en face à face c'est-à-dire sur la même ligne ou sur la même colonne. Le but est de maximiser les points gagnés tout en pouvant bloquer l'adversaire.

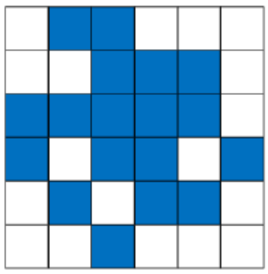


Technique 2 : exemple si on joue en 1er ou en 2ème

- Pour la troisième, nous avons trouvé une stratégie dont le but est d'adapter notre façon de jouer qui dépend de si on joue en 1er ou en 2ème. Si on joue en premier la stratégie est de marquer le plus de points en nous plaçant sur la zone externe, tandis que lorsque que nous jouons en 2ème nous essayons de bloquer en nous plaçant sur la zone centrale empêchant ainsi de marquer des points liés à la zone centrale.

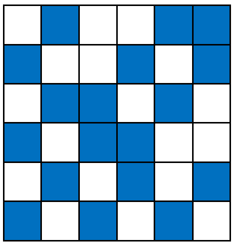


Technique 3 : exemple si on joue en 1er

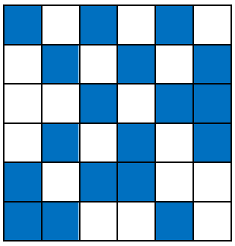


Technique 3 : exemple si on joue en 2ème

- Puis vient ensuite la quatrième stratégie consistant à positionner 3 pions par lignes et par colonne tout en mettant au moins 1 pion en zone centrale et au moins 1 en zone externe. Si on est joueur 1, il faut aussi créer des pions isolés pour bloquer l'adversaire.



Technique 4 : exemple si on joue en 1er



Technique 4 : exemple si on joue en 2ieme

6. Programme Python (1)

```
def place_pion_alea(tableau,N):
    L = [i for i in range(36)]
    couleur=0
    for i in range(36):
        case=random.choice(L)
        x=case%6
        y=case//6
        tableau[x][y]=couleur+1
        couleur=(couleur+1)%N
        L.remove(case)
    return tableau
```

Dans le but d'automatiser nos recherches, nous avons créé un programme en Python. Il joue pour les deux joueurs. Celui-ci dispose les pions au hasard sur le damier. Une liste L de 0 à 35 est créée et permet de représenter toutes les positions possibles. Une valeur de L est choisie au hasard grâce à la fonction choice du module random, elle est nommée « case ». On définit ensuite x (la ligne) et y (la colonne) qui permettent de placer le pion. x est égal au reste de la division euclidienne de C par 6, y est égal au quotient de la division euclidienne de C par 6. La valeur C est ensuite supprimée de la liste L. On recommence ensuite en posant un pion pour le joueur 1 puis un pion pour le joueur 2 jusqu'à ce que le damier soit rempli.

Ensuite, le programme enlève le pion qui rapporte le plus de points sans se soucier des coups à venir, c'est ce qu'on appelle la stratégie gloutonne. Le programme compte les points des deux joueurs et nous renvoie le résultat de la partie. Le programme peut faire plusieurs parties d'affilée et peut donner le nombre de victoires des deux joueurs.

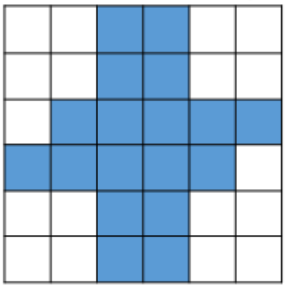
En faisant, beaucoup de simulations (10 000 et plus) nous avons remarqué que le joueur 2 gagne dans environ 70% des cas. Ce qui semble confirmer notre hypothèse de départ : le joueur 2 serait avantagé par rapport au joueur 1. Nous avons donc décidé de nous concentrer sur la recherche de dispositions gagnantes pour le joueur 1 en admettant que les deux joueurs utilisent la stratégie gloutonne lors de la phase de retirement.

6.1. Test des zones du damier

Nous avons voulu vérifier si les zones que nous avons imaginées permettent au joueur 1 de gagner. Nous avons rentré les configurations ci-dessous dans le programme qui a fait mille parties avec.

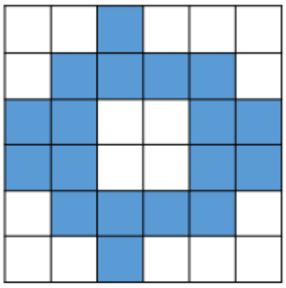
Zone centrale :

0,6% de victoire du j1



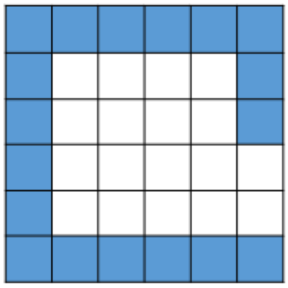
Zone médiane:

12,3% de victoire du j1



Zone externe:

94,8% de victoire du j1



Nous avons pu en déduire des approximations des taux de victoire.

Ainsi, la zone centrale et la zone externe ne permettent pas au joueur 1 de gagner, elles apportent un taux de victoire inférieur à celui obtenu lorsque le joueur 1 dispose ses pions aléatoirement. Cependant, la zone externe offre un taux de victoire d'environ 95% au joueur 1, ce qui est très supérieur au taux de victoire de 30% lorsque le joueur 1 dispose ses pions au hasard.

6.2. Test des stratégies

Dans le même objectif, nous avons testé les stratégies que nous avons élaborées. La stratégie des diagonales lorsque le joueur 1 l'utilise lui donne environ 20% de taux de victoire, lorsque le joueur 2 en fait usage il gagne dans environ 75% des cas.

La stratégie des 3 pions lorsque le joueur 1 l'utilise lui donne environ 20% de chance de gagner tandis que lorsque le joueur 2 joue avec cette stratégie il aura 76% de chance de gagner.

Pour la technique 3, l'adaptative, lorsque le joueur 1 joue avec cette technique il aura 31% de chance de gagner alors que si le joueur 2 joue cette technique il aura 27,2% de chance de gagner.

Et enfin la 4ème stratégie dite de ''la répartie'', le joueur 1 en jouant cette stratégie aura 17,9% de chance de gagner tandis que quand le joueur 2 va jouer cette technique il aura 80,5% de chances de gagner.

Pour le joueur 1, les 4 stratégies donnent entre 17,9% et 31% de victoire, or si le joueur 1 dispose ses pions aléatoirement, il a environ 30% de chances de gagner, donc les stratégies ne sont pas meilleures que l'aléatoire pour le joueur 1.

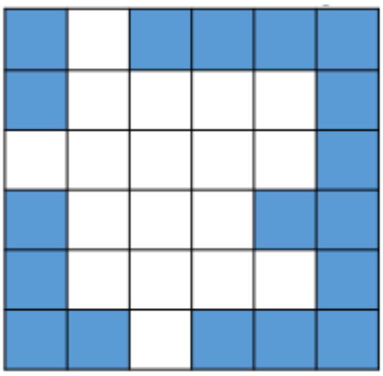
Pour le joueur 2, la 3ème stratégie lui donne 27,2% de victoire ce qui est bien inférieur aux 70% de victoire lorsque le joueur 2 dispose ses pions aléatoirement, elle n'est donc pas intéressante. Les stratégies 1 et 2 permettent au joueur 2 de gagner dans 75% et 76% des cas ce qui est légèrement supérieur aux taux de victoires en disposant les pions au hasard. La 4ème stratégie donne au joueur 2 environ 85% de taux de victoire ce qui est environ 15% supérieur au taux de victoires lorsque le joueur 2 dispose ses pions aléatoirement.

En conclusion on peut dire que nos stratégies de départ ne sont pas concluantes avec la stratégie de retirement gloutonne à l'exception de la 4ème stratégie pour le joueur 2.

6.3. Recherche automatisée de configurations

Pour pouvoir trouver des dispositions vraiment gagnantes pour le joueur 1 nous avons modifié notre programme Python pour qu'il recherche les meilleures configurations avec la stratégie de retirement gloutonne.

En testant 1000 fois
20 000 configurations



Taux de victoire du J1 :
83,8%

Le programme consiste à faire des dispositions aléatoires, ensuite il calcule le taux de victoire du joueur 1 pour chaque configuration (en répétant 1000 fois la même partie) puis renvoie à la fin du programme la configuration avec le meilleur taux de victoire.

En testant avec 20 000 configurations aléatoires le programme, on a déduit que la meilleure configuration est celle-ci car le taux de victoire du joueur 1 est de 83,8%.

7. Conclusion

En conclusion, nous n'avons trouvé aucune disposition qui garantisse un taux de victoire de 100% dans tous les cas.

Cependant, si on considère que les joueurs utilisent la stratégie gloutonne pour marquer des points, nous avons des résultats intéressants. Ainsi, nous savons qu'en plaçant ses pions aléatoirement le deuxième joueur a environ 70% de chances de gagner. De plus, le joueur 1 a environ 95% de chance de remporter une partie s'il dispose tous ces pions dans la zone externe. Nous avons donc prouvé que la zone externe permet de marquer un maximum de points avec la stratégie de retirement gloutonne.

Quant aux autres zones du damier leur efficacité n'a pu être démontrée par nos programmes. Il en va de même pour nos stratégies qui ne font guère mieux, elles ont des statistiques peu différentes de l'aléatoire à 10% près environ.

Cependant, il faut rappeler que ces taux sont obtenus en stratégie de retirement gloutonne, face à un vrai adversaire les stratégies sont peut-être plus efficaces et les zones centrales et médianes ont sans doute leur intérêt.

Enfin, nous n'avons pas concentré nos efforts sur une stratégie gagnante pour le joueur 2 car les chiffres en stratégie gloutonne lui donnent un grand pourcentage de victoire.

Note d'édition

(1) D'abord le programme ne concerne que la première phase de placement aléatoire des jetons, pas de la phase d'enlèvement. Ensuite, le programme possède un paramètre N qui peut sembler étrange. Il s'agit en fait du nombre de joueurs, le jeu pouvant en fait se jouer à plus de deux joueurs (mais l'article ne le mentionne pas et ne présente que la variante à deux joueurs).

Congrès Lyon 2022

A partition without end or without hunger?

Year 2021-2022

Giuliani Marco, Mion Pietro, Zuliani Alessandro (2H),
Gianolla Matteo (3D), Scasso Tommaso, Sinatora Pietro (4G)

School: Liceo Scientifico Giordano Bruno (Venezia-Mestre)
Teacher: Lucia Rossi
Researchers: Francesco Rossi, Alberto Zanardo (Università degli Studi di Padova)

1. The subject

In Autumn, a population of squirrels stocks up on hazelnuts to pass the Winter. Each squirrel collects his personal stock of hazelnuts. To make sure every squirrel has the same amount of hazelnuts, they made up a partition system: when two squirrels meet, they compare their stocks. The squirrel who has less hazelnuts receives by the other the same number of nuts he owns. This method goes on until they own the same amount of hazelnuts.

Questions:

- Are there any situations where this partition never ends?
- If this partition ends, how many steps does it take to get to end?

2. Notations

We call the two numbers of hazelnuts as $(a;\ b)$ with $a, b \in \mathbb{N}$, a is the amount of nuts of the first squirrel and b is the amount of the second one.

To be clearer we are going to make two examples:

Example 1. In this case the partition does not end:

We start with	$(7; 3)$
The first squirrel gives the other 3 hazelnuts, and we obtain	$(4; 6)$
After that the first one receives by the other 4 nuts, we obtain	$(8; 2)$
If we go on with this method, we will arrive back at	$(6; 4)$
And the partition will not end.	

Example 2. In this case the partition ends:

$$(31;\,1)$$
$$(30;\,2)$$
$$(28;\,4)$$
$$(24;\,8)$$
$$(16;\,16)$$

First of all we need to establish some useful definitions.

Definition 1. We have a step when a squirrel gives the other some nuts: a couple $(a;\,b)$, after a step, becomes $(2a;\,b-a)$, if $b>a$ or $(a-b;\,2b)$ if $a>b$.

Definition 2. A couple $(a;\,b)$, with $a,b\in\mathbb{N}$, is solvable if, after a finite number of steps, the squirrels will have the same number of hazelnuts.

3. Solution

The aim of the problem is to find the cases which are solvable and define the number of steps necessary to solve them.

3.1. Trivial cases

While we were working on to find a solution, we found out some trivial cases that we summarize below:

- if $a+b$ is odd the couple is not solvable
- if $(a;\,b)$ is solvable, then $(b;\,a)$ is solvable
- if $a=0$ and $b\neq 0$ the couple is not solvable
- if $a=b$ the couple is trivially solvable

From now on we will consider only the non-trivial cases.

3.2. Solvable couples

First of all, we demonstrate an useful lemma.

***Lemma* 1.** *In each step after the first both number are even.*

Proof: We can assume without loss of generality that $b>a$, so the first step will become:

$$(a;\,b)$$
$$(2a;\,b-a)$$

$a+b$ is even, so a and b have to be both even or both odd; so $b-a$ is even and $2a$ is even. □

Now we observe the relationship between some couples.

***Theorem* 1.** *For all $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, the couple $(a;\,b)$ is solvable if and only if $(ka;\,kb)$ is solvable.*

Proof: There's a one-to-one correspondence between the steps of the case $(a;\,b)$ and the steps of the case $(ka;\,kb)$:

Case $(ka;\,kb)$	**Case** $(a;\,b)$
$(ka;\,kb)$	$(a;\,b)$
$(ka-kb;\,2kb)=\big(k(a-b);\,k(2b)\big)$	$(a-b;\,2b)$
...	...

So if we can solve a couple, we will be able to do that also for the other one. □

***Corollary* 1.** *If k divides both member of the couple $(a;\ b)$ in one step, k will divides both of them for all the next steps.*

We have noticed that when the sum of the couple is equal to a power of two, the couple is always solvable. We have demonstrated it by induction in the next theorem.

***Theorem* 2.** *If $a+b=2^n$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $(a;\ b)$ can be solved in at most $n-1$ steps.*

Proof: By induction on n.

a) The statement is true for $n=2$: the possible cases are $(3;\ 1)$ or $(2;\ 2)$

- $(2;\ 2)$ is a trivial case
- $(3;\ 1)$ finishes in one step: $(3;\ 1)-(2;\ 2)$.

b) We prove that if the statement is true for $n-1$, it will be true for n:

We can assume without loss of generality that $b > a$. If $a+b=2^n$ then $b=2^n-a$. Then$(a;\ 2^n-a)$ becomes $(2a;\ 2^n-2a) = \big(2a;\ 2(2^{n-1}-a)\big)$.

Since the couple $(a;\ 2^{n-1}-a)$ is solvable by the induction hypothesis and according to Theorem 1 (with $k=2$), the couple $(2a;\ 2^n-2a)$ is solvable at most $n-2$ steps.

So the maximum number of steps is at most $n-1$. □

Next, we are going to extend the solvability to other couples and demonstrate that there are no more solvable couples.

***Theorem* 3.** *The couple $(a;\ b)$ can be solved if and only if it exists an odd k such that $a+b=2^n k$ and k divides a and b ($k \mid a, b$).*

Proof: The first part of the theorem is trivial: according to Theorem 1 and Theorem 2, if $a+b=2^n k$ and $k \mid a, b$, the couple $(a;\ b)$ is solvable.

Now we demonstrate that if $(a;\ b)$ is solvable then $a+b=2^n k$ and $k \mid a, b$. We are going to divide the proof in three parts.

a) We prove that if (a, b) is solvable (excluding trivial cases), then $a+b=2^2 h$, with $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. If the couple $(a;\ b)$ is solvable, we will get, in the last step, a situation like $(z;\ z)$. Without considering trivial cases, compared to the previous step, one of the amount of hazelnuts has doubled, so it exists $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ such that $z=2h$; so $a+b=2z=4h$ and $a+b=2^2 h$.

b) Now we prove that if n is the maximum exponent of 2 such that $a+b=2^n k$, then k divides a and b in all the previous steps.

If $(a;\ b)$ is solvable and $a+b=2^n k$, the last step is $(2^{n-1}k;\ 2^{n-1}k)$, where both numbers are divisible by k.

The previous step has to be $(2^{n-2}k;\ 2^{n-2}k+2^{n-1}k) = (2^{n-2}k;\ 3\cdot 2^{n-2}k)$, which is still divisible by k. We can observe that this configuration is such as $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$ where α, β are odd.

We want to demonstrate that the previous step is such as $(\alpha' 2^{m-1}k;\ \beta' 2^{m-1}k)$ where α', β' are odd and where both number are still divisible by k.

We can suppose without loss of generality that $\alpha > \beta$. The couple $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$ comes from an only one configuration: $((2\alpha+\beta)2^{m-1}k;\ \beta 2^{m-1}k)$ (1); we notice that the coefficients $2\alpha+\beta$ and β are still odd.

c) According to Lemma 1 this process can continue as long as $m \geq 1$; so $k \mid a, b$ in all the previous steps (2). □

3.3. Calculating the steps

The next aim is to demonstrate how many steps a couple requires to be solved.

We divided our reasoning in two theorems, a simple one and a general one.

In the simple case, both members of the starting couple are odd.

***Theorem* 4.** *The number of steps to solve a solvable couple $(\alpha k;\ \beta k)$, with α, β coprime and where k is odd, is $\log_2(\alpha+\beta)-1$.*

Proof: Considering Theorem 1, the couple $(\alpha k;\ \beta k)$ has the same steps as the couple $(\alpha;\ \beta)$.

To make the couple solvable, by Theorem 3, $\alpha+\beta=2^n$.

Considering Lemma 1, after the first step both numbers are divisible by 2^1.

After another step, both numbers are divisible by 2^2.

Generally, after $n-1$ steps, both numbers are divisible by 2^{n-1} (3). The only two positive numbers which are divisible by 2^{n-1} and which have sum 2^n, are 2^{n-1} and 2^{n-1}. The two numbers are equal, so the couple got solved with $n-1$ steps, that can be written as $\log_2(\alpha+\beta)-1$. □

We conclude our reasoning with the general case.

***Theorem* 5.** *The number of steps to solve a solvable couple $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$, where α, β are coprime and where k is odd, is $\log_2(\alpha+\beta)-1$.*

Proof: Considering theorem 1, the couple $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$ has as many steps as the couple $(\alpha;\ \beta)$.

If $\alpha 2^m+\beta 2^m=2^n$, then $\alpha+\beta=2^{n-m}$.

According to the previous demonstration, the steps are $n-m-1=\log_2(\alpha+\beta)-1$. □

4. Conclusion

The couples which are solvable are such as $(a;\ b)$ with $a, b \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $a+b=2^n k$ and $k \mid a, b$. This couples are solvable in $n-(m+1)$ steps, where m is the maximum exponent of 2 such that $2^m \mid a, b$.

Editing Notes

(1) In fact $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$ may also come from $(\alpha 2^{m-1} k;\ \big((\alpha+2\beta)2^{m-1}k\big)$ at the previous step (and the order between α and β does not matter here). But the conclusion that the coefficients of $2^{m-1}k$ are odd still holds in this case.

(2) When $m=1$, we get a couple $(\alpha k;\ \beta k)$ of odd integers; indeed, k is odd since $a+b=2^n k$ where n is the greatest integer such that 2^n divides $a+b$. Then, according to Lemma 1, there is no possible previous step. It follows that either this couple is $(a;\ b)$, or $(a;\ b)$ appeared earlier in the the sequence of couples $(\alpha 2^m k;\ \beta 2^m k)$ and thus in all cases $k \mid a, b$.

(3) It must be shown that the process *does not stop* before step $n-1$: indeed, we start with α and β which are odd since they are coprime and $\alpha+\beta=2^n$, and it follows from the proof of Theorem 3 (b) that $n-1$ steps are required to get $(2^{n-1};\ 2^{n-1})$ from a couple of odd numbers.

Derrière la magie … Le CODE !
1er tour de magie

Année 2021- 2022

Juliette Hamon, Sacha Lombard, Tamara Adan Dominguez, Tessa Arifi, élèves de 4ème

Établissement : Collège George Chepfer, Villers lès Nancy
Encadrés par Louisette Hiriart et Ziya Findik
Chercheuse : Marie Duflot-Kremer, LORIA Nancy.

1. Présentation du sujet

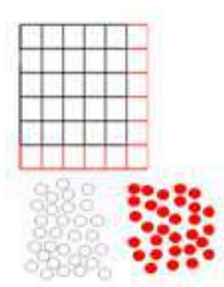
Tour de magie

Une magicienne et son assistant disposent d'un plateau carré 6 × 6, de jetons blancs et de jetons rouges en quantité.
Un élève de la salle place sur chaque case du plateau sauf celles de la dernière ligne et dernière colonne un jeton blanc ou un rouge comme il veut. L'assistant remplit alors la dernière colonne et la dernière ligne du plateau avec des jetons blancs ou rouges. La magicienne mémorise quelques secondes le plateau ainsi complété puis se cache les yeux avec un bandeau, elle ne voit plus rien.
L'assistant demande alors à l'élève de changer la couleur d'un des jetons. Toute l'assemblée a bien visualisé le jeton changé, sauf la magicienne qui a les yeux bandés.
La magicienne enlève son bandeau et rapidement, elle peut dire quel jeton a été changé.

Impressionnant non ?

Le but de ce sujet est tout d'abord de comprendre le tour de magie, découvrir le truc qui est plus scientifique que magique, et très utile en informatique : les codes correcteurs d'erreur.
Ensuite les apprentis chercheurs vont pouvoir modifier une partie des conditions de jeu selon leur choix : le nombre de jetons à changer, les dimensions du plateau, le nombre de couleurs de jetons, et voir si le tour de magie fonctionne toujours, ou si l'on peut modifier le « truc » pour continuer à bluffer le public.

2. Sommaire



1°) Dans un premier temps, les élèves vont expliquer ce tour de magie et en énoncer la règle de fonctionnement.
2°) Puis les élèves vont modifier certaines conditions de ce tour et voir s'il fonctionne toujours ou bien s'il faut en modifier quelque peu la règle :

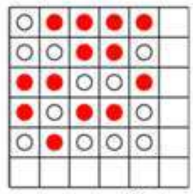
a) Si on modifie les dimensions du plateau ?
b) Si on change la couleur de plusieurs jetons ?
c) Si on a des jetons de 3 couleurs et même plus ?

3. Conclusion

Nous avons vu que le tour de magie s'explique facilement en étudiant la parité des jetons sur les lignes et colonnes du plateau et qu'il fonctionne toujours quelles que soit les dimensions du plateau. De plus, si on a des jetons de plus de 2 couleurs, nous avons pouvons aussi facilement réussir ce tour de magie.
Par contre si l'élève change la couleur de plusieurs jetons, le tour de magie ne fonctionne pas en général.

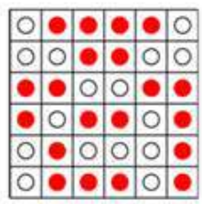
1° Règle de base du tour de magie

1 - L'élève commence par remplir le plateau à sa guise avec des jetons blancs et rouges, sans remplir la dernière ligne et la dernière colonne du plateau 6 × 6. **(fig.1)**


(fig.1)

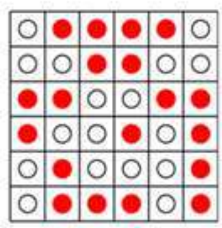
2 - L'assistant complète la dernière colonne de telle manière que **le nombre de jetons blancs et le nombre de jetons rouges soient pairs sur chaque ligne.**
Par exemple sur la 1ère ligne, il y a un seul jeton blanc et 4 jetons rouges, l'assistant ajoute un jeton blanc dans la dernière case de la ligne. **(fig.2)**

De même, il complète la dernière ligne de telle manière que le nombre de jetons de chaque couleur soit pair dans chaque colonne.
Par exemple dans la 2ème colonne, il y a 2 jetons blancs et 3 jetons rouges, l'assistant ajoute un jeton rouge dans la dernière case de la colonne. **(fig.2)**

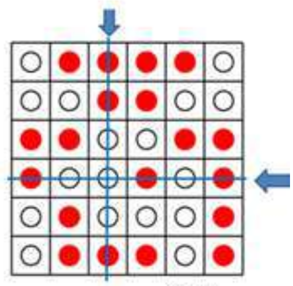

(fig.2)

La magicienne mémorise 5 secondes le plateau puis se couvre les yeux.

3 - L'élève change la couleur d'un seul jeton. Il change le jeton rouge à l'intersection de la 4ème ligne et de la 3ème colonne par un jeton blanc. **(fig.3)**


(fig.3)

4 - La magicienne se découvre les yeux et retrouve le jeton changé par l'élève.
Elle remarque que dans la 3ème colonne, il y a 3 jetons rouges et 3 jetons blancs. 3 est impair donc l'élève a changé un jeton dans la 3ème colonne.
Elle remarque aussi que dans la 4èmeligne, il y a aussi 3 jetons rouges et 3 jetons blancs donc l'élève a changé un jeton dans la 4ème ligne.
La magicienne a retrouvé le jeton à l'intersection de la 4ème ligne et 3ème colonne, ce qui est exact. **(fig.4)**


(fig.4)

Règle de base du tour de magie :

L'assistant complète la dernière ligne et la dernière colonne du plateau de façon que
le nombre de jetons d'une même couleur soit pair sur chaque ligne et chaque colonne.

Ainsi la magicienne pourra retrouver le jeton dont la couleur a été changée par l'élève car cela a eu pour effet de rendre impair le nombre de jetons blancs et le nombre de jetons rouge sur la ligne et la colonne où l'élève a changé la couleur du jeton.

Remarque : *Nous démontrerons plus loin dans l'article que l'assistant pourra toujours mettre le bon jeton dans la dernière case en bas à droite pour remplir les conditions voulues à la fois dans la dernière ligne et la dernière colonne.*

2° Peut-on modifier certaines conditions de ce tour de magie ?

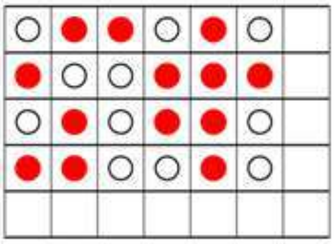
a) Si on modifie les dimensions du plateau.

- **Pour tout plateau dont le nombre de lignes et celui de colonnes sont pairs,** le tour fonctionne sans changer les règles car la parité est la même sur les jetons de chaque couleur sur chaque ligne et chaque colonne.
  En effet, sur une ligne ou une colonne où il y a un nombre pair de jetons, si le nombre de jetons rouges est pair, celui des jetons blancs le sera aussi.

- **Pour un plateau dont le nombre de lignes et/ou le nombre de colonnes sont impairs,** nous avons constaté qu'il suffisait que la magicienne et son assistant se mettent d'accord au départ sur une des couleurs, par exemple le rouge.
  En complétant la dernière ligne et la dernière colonne, l'assistant fera en sorte que seulement le nombre de jetons rouges soit pair, sans se préoccuper des jetons blancs. *Nous justifierons cette règle au c).*

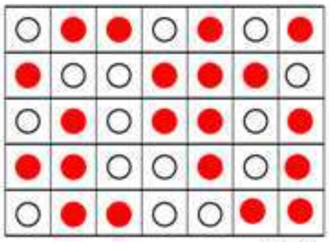
Par exemple, étudions ce tour de magie avec la nouvelle règle sur un plateau de 5 lignes et 7 colonnes.

1 - L'élève commence par remplir le plateau à sa guise avec des jetons blancs et rouges, sans remplir la dernière ligne et la dernière colonne du plateau 5 ×7. **(fig.5)**


(fig.5)

2 - L'assistant complète la dernière colonne de telle manière que **le nombre de jetons rouges soient pairs sur chaque ligne** sans se préoccuper des jetons blancs.
Par exemple sur la 1ère ligne, il y a 3 jetons rouges, l'assistant ajoute donc un jeton rouge dans la dernière case de la ligne pour avoir un nombre pair de jetons rouges. **(fig.6)**

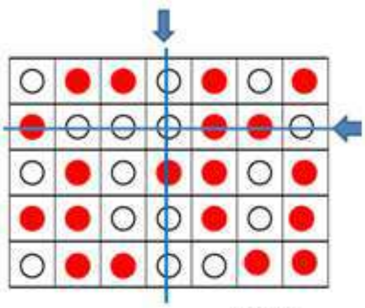
De même, il complète la dernière ligne de telle manière **que le nombre de jetons rouges soit pair dans chaque colonne.**
Par exemple dans la 1ème colonne, l'assistant ajoute un jeton blanc dans la dernière case de la colonne car il y a 2 jetons rouges. **(fig.6)**


(fig.6)

La magicienne mémorise 5 secondes le plateau puis se couvre les yeux.

3 - L'élève change la couleur d'un seul jeton. Il change le jeton rouge à l'intersection de la 2ème ligne et de la 4ème colonne par un jeton blanc.

4 - La magicienne se découvre les yeux et retrouve le jeton changé par l'élève.
Elle remarque que dans la 4ème colonne, il y a 1 seul jeton rouge donc l'élève a changé un jeton dans la 4ème colonne.
Elle remarque aussi que dans la 2ème ligne, il y a aussi 3 jetons rouges donc l'élève a changé un jeton dans la 2ème ligne.
La magicienne a retrouvé le jeton à l'intersection de la 2ème ligne et 4ème colonne, ce qui est exact. **(fig.7)**

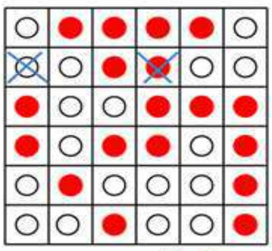

(fig.7)

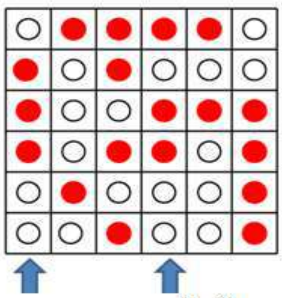
Ainsi dans la suite de l'article :

- **Nous ne tiendrons plus compte des dimensions du plateau, l'assistant rendra simplement le nombre de jetons rouges pair sur chaque ligne et chaque colonne.** *(Justification au paragraphe c)*
- **Nous ne prendrons que des plateaux d'au moins 4 lignes et 4 colonnes pour que le tour de magie ne soit pas trop simple et pour que l'assistant place moins de jetons que l'élève.**

b) Si l'élève change la couleur de plusieurs jetons, la magicienne pourra-t-elle les retrouver ?

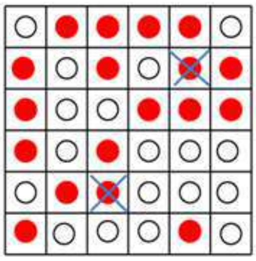
▪ Si l'élève change la couleur de 2 jetons alignés :
L'élève a complété le plateau 6 × 6 sauf la dernière ligne et la dernière colonne et l'assistant a complété la dernière ligne et la dernière colonne de sorte que le nombre de jetons rouges soit pair dans toutes les lignes et toutes les colonnes.
L'élève change la couleur des 2 jetons marqués d'une croix. **(fig.8)**

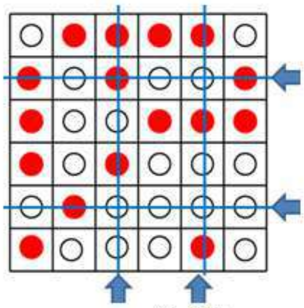

(fig.8)


(fig.9)

La magicienne se trouve face au plateau de la **figure 9** et va se rendre compte qu'il y a eu un changement de jeton dans la 1ère colonne, car il y a 3 jetons rouges.
Dans les 2ème et 3ème colonnes, le nombre de jetons rouges est pair, donc il n'y a pas de changement détecté.
Elle voit ensuite que le nombre de jetons rouges dans la 4ème colonne est impair. Il y a eu un changement dans cette colonne.
Dans les 5ème et 6ème colonnes, le nombre de jetons rouges est pair, il n'y donc pas de changement détecté.
La magicienne a donc détecté 2 changements dans les 1ère et 4ème colonnes. **(fig.9)**
Elle cherche alors dans quelle ligne.
Mais le nombre de jetons rouges est pair dans toutes les lignes.
La magicienne aura donc détecté 2 changements dans 2 colonnes, mais elle ne saura pas dire dans quelle ligne.
Dans ce cas, le tour de magie ne fonctionne pas.

▪ Si l'élève change la couleur de 2 jetons non alignés :
L'élève a complété le plateau 6 × 6 sauf la dernière ligne et la dernière colonne et l'assistant a complété la dernière ligne et la dernière colonne de sorte que le nombre de jetons rouges soit pair dans toutes les lignes et toutes les colonnes.
L'élève change la couleur des 2 jetons marqués d'une croix. **(fig.10)**

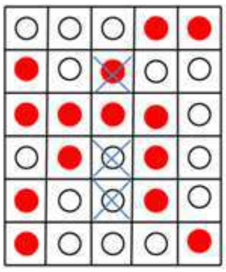

(fig.10)

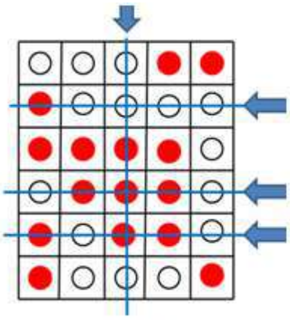

(fig.11)

La magicienne se trouve face au plateau de la **figure 11** et va se rendre compte qu'il y a eu un changement de jetons dans les 3ème et 5ème colonnes ainsi que dans les 2ème et 5ème lignes, car le nombre de jetons rouges y est impair.
La magicienne a alors 2 choix possibles de 2 jetons :
- les 2 jetons à l'intersection de la 3ème colonne et 2ème ligne et à l'intersection de la 5ème colonne et 5ème ligne.
- les 2 jetons à l'intersection de la 3ème colonne et 5ème ligne et à l'intersection de la 5ème colonne et 2ème ligne.

La magicienne a donc une chance sur deux de se tromper, le tour de magie ne fonctionne pas.

▪ <u>Si l'élève change la couleur de 3 jetons alignés :</u>

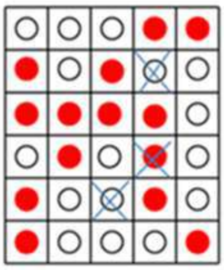

(fig.12)

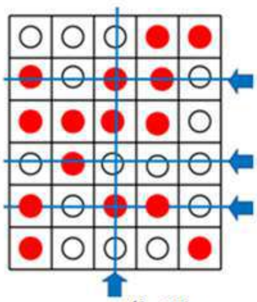

(fig.13)

L'élève change les 3 jetons alignés marqués d'une croix dans le plateau complété par l'élève puis l'assistant. **(fig.12)**

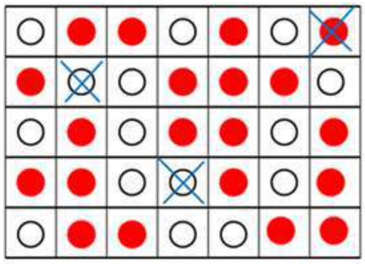
La magicienne remarque alors sur le plateau obtenu **(fig.13)** qu'il y a des changements de jetons dans les 2ème, 4ème et 5ème lignes ainsi que dans la 3ème colonne où le nombre de jetons rouges est impair.
Elle a donc trouvé les 3 changements de jetons de l'élève à l'intersection des 2ème, 4ème et 5ème lignes avec la 3ème colonne.

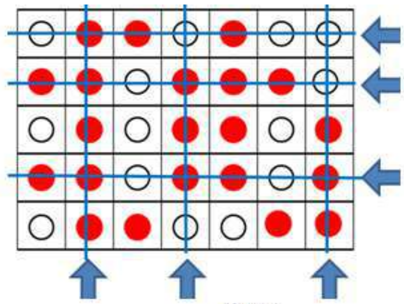
Mais **attention !** Si l'élève avait changé les jetons marqués d'une croix de la **figure 14**, la magicienne aurait retrouvé les même 3 changements de jetons alignés **(fig.15)** et se serait complètement trompée.


(fig.14)


(fig.15)

▪ <u>Si l'élève change la couleur de 3 jetons non alignés 2 à 2 :</u>
L'élève change les 3 jetons marqués d'une croix dans le plateau complété par l'élève puis l'assistant. **(fig.16)**

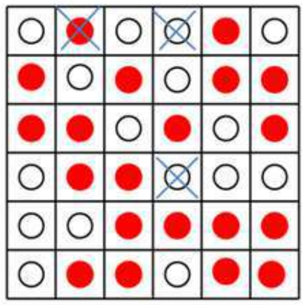

(fig.16)

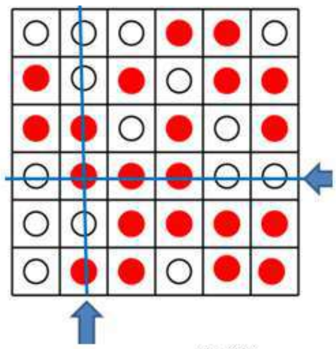

(fig.17)

La magicienne va détecter des changements de jetons dans les 3 colonnes et les 3 lignes marquées où le nombre de jetons rouges est impair. **(fig.17)**
Pour rétablir la parité du nombre de jetons rouges sur les lignes et colonnes repérées, elle a 6 choix possibles de 3 jetons, un sur chaque ligne et chaque colonne et un seul sera le bon !

Dans cet exemple, la magicienne détecte qu'au moins 3 jetons ont été changés mais le tour de magie ne fonctionne pas car la magicienne n'a qu'une chance sur 6 de trouver les 3 jetons changés par l'élève.

▪ <u>Un dernier changement de couleur de 3 jetons :</u>
L'élève change les 3 jetons marqués d'une croix dans le plateau complété par l'élève puis l'assistant. **(fig.18)**

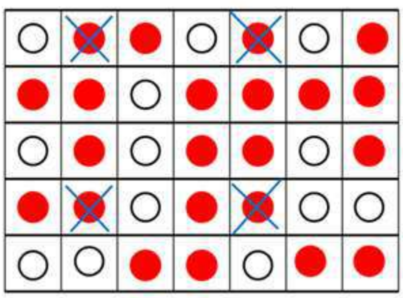

(fig.18)

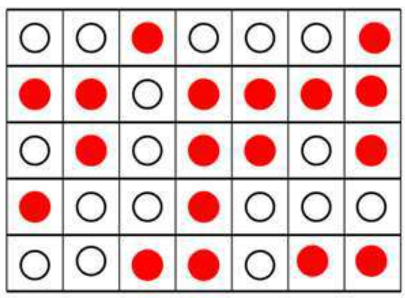

(fig.19)

Ici **(fig.19)**, la magicienne ne détecte qu'un seul changement à l'intersection de la 2ème colonne et 4ème ligne. Elle s'est complètement trompée. Le tour de magie ne fonctionne pas.

▪ <u>Et enfin si l'élève change la couleur de 4 jetons :</u>
L'élève change les 3 jetons marqués d'une croix dans le plateau complété par l'élève puis l'assistant. **(fig.20)**

La magicienne remarque alors sur le plateau obtenu **(fig.21)** que le nombre de jetons rouges est pair sur toutes les lignes et toutes les colonnes. Elle ne détecte aucun changement de couleur de jetons.


(fig.20)


(fig.21)

<u>En conclusion :</u>
La magicienne détectera et pourra toujours retrouver un changement d'un seul jeton.
Elle détectera un changement de 2 ou 3 jetons mais elle ne les détectera pas forcément tous et ne pourra pas les retrouver avec certitude.
À partir de 4 jetons, la magicienne pourra même n'en détecter aucun.
Ainsi dans la suite de l'article, l'élève ne changera la couleur que d'un seul jeton pour que le tour de magie fonctionne à tous les coups.

c) Peut-on jouer à ce tour de magie avec plus de 2 couleurs de jetons ?

• Tout d'abord, reprenons le cas de **2 couleurs** pour bien justifier la règle de base du tour de magie quelle que soit la dimension du plateau.

Nous avons noté par **0 les jetons blancs** et par **1 les jetons rouges** et nous avons obtenu un tableau comme ci-dessous pour un plateau de 7 colonnes et 5 lignes.

0	0	1	0	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1

(fig.22)

Ce tableau **(fig.22)** nous a fait penser **à la numération binaire** (la base 2) qui sert en informatique et **à un tableau d'addition** où **les nombres de la dernière colonne sont le dernier chiffre des sommes des nombres de chaque ligne et les nombres de la dernière ligne sont le dernier chiffre des sommes des nombres de chaque colonne en base 2.**

En effet, dans une ligne (ou une colonne) le nombre de jetons rouges placés par l'élève correspond à la somme des 1 de la ligne (ou la colonne).

Si le nombre de jetons rouges placés par l'élève est pair (la somme des 1 sera un nombre pair et son écriture en base 2 se terminera par 0), l'assistant ajoute un jeton blanc (qui correspond à 0) pour que le nombre de jetons rouges dans la ligne (ou la colonne) reste pair.
Si le nombre de jetons rouges placés par l'élève est impair (la somme des 1 sera un nombre impair et son écriture en base 2 se terminera par 1), l'assistant ajoute un jeton rouge (qui correspond à 1) pour que le nombre de jeton rouge dans la ligne (ou la colonne) soit pair.

<u>Remarque :</u> Cela justifie le fait que pour un tableau de dimension quelconque, nous avons trouvé qu'il suffisait de rendre pair le nombre de jetons rouges sans que l'on se préoccupe des jetons blancs.

L'assistant a donc complété la 7ème colonne et la 5ème ligne du tableau en écrivant le dernier chiffre de l'écriture en base 2 de la somme des nombres de chaque ligne et chaque colonne.

◦ Sur la 1ème ligne, la somme des nombres de la ligne est 1, l'assistant note un 1
Cela correspond à : l'élève a placé un seul jeton rouge sur la 1ère ligne, l'assistant rajoute un jeton rouge dans la dernière case de la 1ère ligne pour que le nombre de jetons rouges de la ligne soit pair.

◦ Sur la 2ème ligne, la somme des nombres de la ligne est 1 + 1 + 0 + 1+ 1 + 1 = 5 qui s'écrit **101** en base 2.
Le dernier chiffre de ce nombre en base 2 est 1, c'est le reste dans la division euclidienne de 5 par 2.
5 = 2×2 + **1**×1 L'assistant note un 1.
Cela correspond à : l'élève a placé 5 jetons rouges sur la 2ème ligne, l'assistant rajoute un jeton rouge dans la dernière case de la 2ème ligne pour que le nombre de jetons rouges de la ligne soit pair.

◦ Sur la 3ème ligne, la somme des nombres de la ligne est 0 + 1 + 0 + 1+ 1 + 0 = 3 qui s'écrit **11** en base 2.

Le dernier chiffre de ce nombre en base 2 est 1, c'est le reste dans la division euclidienne de 3 par 2.
3 = 1×2 + **1**×1 L'assistant note un 1.
Cela correspond à : l'élève a placé 5 jetons rouges sur la 3ème ligne, l'assistant rajoute un jeton rouge dans la dernière case de la 2ème ligne pour que le nombre de jetons rouges sur la ligne soit pair.

◦ Sur la 4ème ligne, la somme des nombres de la ligne est 1 + 0 + 0 + 1+ 0 + 0 = 2 qui s'écrit **10** en base 2.
Le dernier chiffre de ce nombre en base 2 est 0, c'est le reste dans la division euclidienne de 2 par 2.
2 = 1×2 + **0**×1 L'assistant note un 0.
Cela correspond à : l'élève a placé 2 jetons rouges sur la 4ème ligne, l'assistant rajoute un jeton blanc dans la dernière case de la 4ème ligne pour que le nombre de jetons rouges sur la ligne reste pair.

◦ L'assistant remplit de la même manière la dernière ligne du tableau, chaque nombre de cette dernière ligne est le dernier chiffre de l'écriture en base 2 de la somme des nombres de chaque colonne.

◦ Enfin pour la dernière case en bas à droite du tableau, **d'après les propriétés de l'addition**, 1 est le dernier chiffre en base 2 :

- de la somme des 24 nombres correspondants aux jetons placés par l'élève
  Cette somme est égale à 11
  11 = 5×2 + **1**×1 Le dernier chiffre de l'écriture en base 2 de 11 est 1
- mais aussi de la somme des nombres de la dernière colonne 1 + 1 + 1 + 0 = 3
  3 = 1×2 + **1**×1 Le dernier chiffre de l'écriture en base 2 de 3 est 1
- et également de la somme des nombres de la dernière ligne 0 + 0 +1 + 1 + 0 + 1 = 3

Les propriétés de l'addition justifient ainsi le fait que l'assistant pourra toujours mettre le bon jeton dans la dernière case en bas à droite pour que le nombre de jetons rouges soit pair à la fois dans la dernière ligne et la dernière colonne.

• Nous avons alors pensé faire de même **avec 3 couleurs** en représentant par 0, 1 ou 2 les trois couleurs et en utilisant **la base 3** et **un tableau d'addition**.
L'élève place les 20 jetons de 3 couleurs du plateau de 6 colonnes et 5 lignes sans placer de jetons dans la dernière ligne et la dernière colonne **(fig23)**.

0	1	2	2	0	
1	2	0	1	2	
0	2	2	1	1	
2	0	0	0	1	

(fig.23)

L'assistant complète chaque ligne et chaque colonne en écrivant le dernier chiffre de l'écriture en base 3 de la somme des nombres de chaque ligne et chaque colonne.

0	1	2	2	0	2
1	2	0	1	2	0
0	2	2	1	1	0
2	0	0	0	1	0
0	2	1	1	1	2

(fig.24)

Ainsi, dans **la figure 24** :
◦ Dans la 1ère ligne :
1 + 2 + 2 = 5, 5 = **1**×3 + **2**×1 donc 5 s'écrit **12** en base 3. Le dernier chiffre est 2, c'est le reste dans la division euclidienne de 5 par 3.
L'assistant note 2 dans la 1ère ligne.

◦ Dans la 2ème ligne ;
1 + 2 + 0 + 1 + 2 = 6, 6 = **2**×3 + **0**×1 donc 6 s'écrit **20** en base 3. Le dernier chiffre est 0, c'est le reste dans la division euclidienne de 6 par 3. L'assistant note 0 dans la 2ème ligne.

◦ Dans la 3ème ligne ;
0 + 2 + 2 + 1 + 1 = 6, 6 = **2**×3 + **0**×1 donc 6 s'écrit **20** en base 3. Le dernier chiffre est 0, c'est le reste dans la division euclidienne de 6 par 3. L'assistant note 0 dans la 3ème ligne.

◦ Dans la 4ème ligne ;
2 + 0 + 0 + 0 + 1 = 3, 3 = **1**×3 + **0**×1 donc 6 s'écrit **10** en base 3. Le dernier chiffre est 0, c'est le reste dans la division euclidienne de 3 par 3. L'assistant note 0 dans la 4ème ligne.

◦ On fait de même dans les 1ère et 2ème colonnes où les sommes sont respectivement égales à 3 et 5. L'assistant note 0 dans la 1ère colonne et 2 dans la 2ème colonne.

◦ Dans la 3ème colonne,
2 + 1 + 1 + 0 = 4, 4 = **1**×3 + **1**×1 donc 4 s'écrit **11** en base 3. Le dernier chiffre est 1, c'est le reste dans la division euclidienne de 4 par 3. L'assistant note 1 dans la 3ème colonne.

◦ Et on poursuit les additions pour les 4ème et 5ème colonnes où les sommes sont égales à 4 et l'assistant note un 1 dans ces colonnes.

◦ Enfin pour la dernière case en bas à droite du tableau, **d'après les propriétés de l'addition**, 2 est le dernier chiffre de l'écriture en base 3:

- de la somme des 20 nombres correspondants aux jetons placés par l'élève.
  Cette somme est égale à 20, 20 = **6**×3 + **2**×1. Le dernier chiffre dans l'écriture en base 3 est 2.
- mais aussi de la somme des nombres de la dernière ligne égale à 5 et dont le dernier chiffre de l'écriture en base 3 est 2.
- et également de la somme des nombres de la dernière colonne égale à 2.

On obtient ainsi le plateau rempli de 0,1 et 2 de **la figure 24**.
L'élève change le jeton noté 2 à l'intersection de la 3ème ligne et la 3ème colonne par un jeton 0 et la magicienne se trouve alors face à ce plateau **(fig.25)**

0	1	2	2	0	2
1	2	0	1	2	0
0	2	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0
0	2	1	1	1	2

(fig.25)

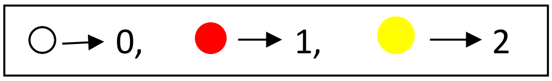
La magicienne retrouve ce jeton dans la 3ème ligne car le dernier chiffre de la ligne devrait être 1 et non pas 0 puisque la somme des 5 premiers nombres de la 3ème ligne est 4 et 4 = **1**×3 + **1**×1 et dans la 3ème colonne car le dernier chiffre de la colonne devrait être 2 et non pas 1 puisque la somme des 4 premiers nombres de la colonne est 2 et 2 = 0×3 + **2**×1
Et pour rétablir le tableau d'addition correct, il faut changer le 0 à l'intersection de la 3ème ligne et la 3ème colonne en un 2.

Avec ce codage en base 3, notre tour de magie fonctionne et est prêt à épater le public.

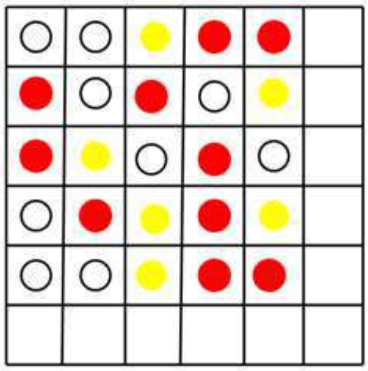
0	1	2	2	0	2
1	2	0	1	2	0
0	2	0	1	1	0
2	0	0	0	1	0
0	2	1	1	1	2

(fig.26)

Voyons sur un exemple, avec des jetons de 3 couleurs : blanc, rouge et jaune.
Pour chaque jeton blanc, nous mémorisons la valeur 0, pour chaque jeton rouge la valeur 1 et pour chaque jeton jaune la valeur 2



1 - L'élève complète le plateau avec des jetons des 3 couleurs sans remplir la dernière ligne et la dernière colonne. **(fig.27)**

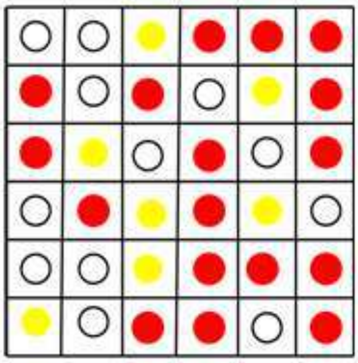

(fig.27)

2 - L'assistant complète la dernière colonne et la dernière ligne avec des jetons blancs, rouges ou jaunes de telle manière que la couleur du jeton posé corresponde au dernier chiffre de l'écriture en base 3 de la somme des valeurs des jetons posés par l'élève sur chaque ligne et chaque colonne. **(fig.28)**

Par exemple sur la 1ère ligne, il y a 2 jetons blancs, 1 jeton jaune et 2 jetons rouges, cela correspond à la somme 0 + 0 + 2 + 1 + 1 = 4, le reste dans la division euclidienne de 4 par 3 est 1, l'assistant ajoute un jeton rouge dans la dernière case de la 1ère ligne.

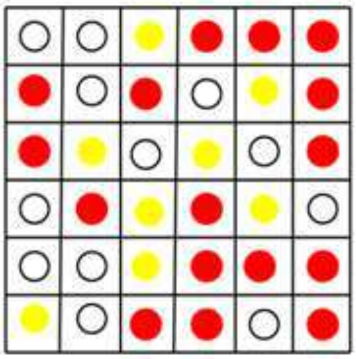
Et par exemple dans la 3ème colonne, il y a 1 jeton jaune, 1 jeton rouge, 1 jeton blanc et 2 jetons jaunes, cela correspond à la somme 2 + 1 + 0 + 2 + 2 = 7, le reste dans la division euclidienne de 7 par 3 est 1, l'assistant ajoute un jeton rouge dans la dernière case de la 3ème colonne. **(fig.2)**

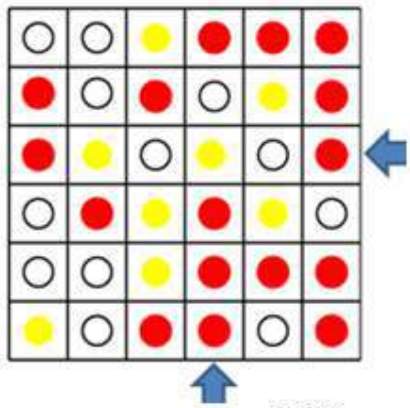
La magicienne mémorise 5 secondes le plateau puis se couvre les yeux.


(fig.28)

La magicienne mémorise rapidement le plateau puis se couvre les yeux.

3 - L'élève change la couleur d'un seul jeton. Il change le jeton rouge à l'intersection de la 3ème ligne et de la 4ème colonne par un jeton jaune. **(fig.29)**


(fig.29)



(fig.30)

4 - La magicienne se découvre les yeux et retrouve le jeton changé par l'élève.
Elle remarque que dans la 3èmeligne, il y a 1 jeton rouge, 2 jetons blancs et 2 jetons jaunes dans les 5 premières cases de la ligne, l'assistant aurait donc dû placer un jeton jaune dans la dernière case de la ligne et non pas un rouge. L'élève a donc changé un jeton dans la 3ème ligne.
Elle remarque aussi que dans la 4ème colonne, il y a aussi 3 jetons rouges, 1 jeton blanc et 1 jeton jaune dans les 5 premières cases de la colonne, l'assistant aurait donc dû placer un jeton jaune dans la dernière case de la colonne et non pas un rouge. L'élève a donc changé un jeton dans la 4ème colonne.
La magicienne a retrouvé le jeton à l'intersection de la 3ème ligne et 4ème colonne, ce qui est exact. **(fig.30)**

La magicienne affirme aussi qu'il faut changer le jeton jaune à l'intersection de la 3ème ligne et de la 4ème colonne en un jeton rouge pour que les jetons placés par l'assistant soient corrects.

Pour **des jetons de 4 couleurs,** on fait de même en calculant les sommes de chaque ligne et chaque colonne en **base 4**.

Pour **des jetons de 5 couleurs,** on fait de même en calculant les sommes de chaque ligne et chaque colonne en **base 5**. Etc.

Mais plus il y a de couleurs, plus le plateau doit être grand pour ne pas mémoriser facilement le plateau complété par l'élève et l'assistant, et les calculs sont alors plus longs.

En conclusion :
Même avec des jetons de 3 couleurs, la magicienne détectera et pourra toujours retrouver un changement d'un seul jeton et lui redonner la bonne couleur. Pour cela, elle et son assistant donneront à chaque couleur une valeur 0, 1 ou 2 et ils utiliseront des calculs de sommes de nombres en base 3 sur chaque ligne et chaque colonne.

Remerciements


Villers-lès-Nancy
C'est un peu magique les maths au collège Chepfer !

Est Républicain (12/04/2022)

Nous tenons à remercier tous nos partenaires :

- le conseil départemental 54
- l'association MATh.en.JEANS
- le rectorat
- le collège G CHEPFER
- le F S E du collège Chepfer
- l'I N R I A


Paris (01/04/2022)

Sans leurs soutiens, le voyage au congrès à Supelec Paris Saclay n'aurait pas été possible.

Nous remercions aussi chaleureusement notre chercheuse Marie Duflot-Kremer, pour le choix de ce sujet de recherche et son aide bienveillante tout au long de l'année, son dynamisme et ses nombreux tours de magie !

Homework Planning

Year 2022-2023

Adrian Fotea, Robert Lascar, Bianca Parvan, Daria Oniciuc, Andra Varlam, Maria Moruzi, Andrei Atomulesei, Bogdana Munteanu, Anastasia Chirila (10th grade)

School: Colegiul Naţional 'Costache Negruzzi', Iaşi, România
Teachers: Adrian Zanoschi, Vlad Tuchilus (student, St. Hugh's College, University of Oxford)
Researcher: Iulian Stoleriu (Universitatea 'Alexandru Ioan Cuza' din Iaşi)

Abstract

In this article we consider a problem relating to the mathematical modelling of homework assignments. We develop recurrence relations to solve the problem and expand it by considering generalizations and obtaining general formulas for their solutions. One particular focus is on probabilistic variants of the original problem.

1. Presentation of the Research Topic

A university course consists of 14 lectures, and the professor gives homework to his students at each lecture. Each homework will be marked by the professor by either P (pass) or F (fail). In order to qualify for the final exam, a student must have

- at most one missing homework (out of 14);
- no three consecutive homework fails.

In how many ways can a student organize his homework to qualify for the final exam? What if the consecutive requirement is removed?

2. Brief Presentation of the Results Obtained

The solution to the original problem above will be presented in section 3.2.

Before that, we first generalize the problem in section 3.1 to obtain the necessary tools that will allow us to easily solve it. In particular, we consider what happens when the numbers 14 and 3 in the problem statement are replaced by general n and k.

It turns out that if we let $x_{n,k}$ denote the number of ways a student can organize his homework to n lectures such that he has no k consecutive Fs, then the $x_{n,k}$ satisfy a beautiful recurrence relation

$$x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k} + \ldots + x_{n-k,k} \quad \text{for all } n > k,$$

which generalizes the famous Fibonacci recurrence relation

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad \text{for all } n \geq 2.$$

Thus, our generalization not only has the advantage of being more versatile, solving more than one specific problem, it also sheds light on the fascinating hidden structure of the original problem.

In section 3.3 we present the standard way of obtaining an explicit formula for the n^{th} Fibonacci number and use it to obtain an explicit formula for $x_{n,2}$.

Section 3.4 introduces a further generalization of our problem by introducing a probabilistic element. Specifically, we study what happens if the student is assigned a pass with probability p and a fail with probability $1-p$ independently for each homework assignment. As in the deterministic case, we prove a recurrence relation and then develop explicit formulas in the case $k=2$ in section 3.5.

Finally, in section 3.6 we consider the limiting case $n=\infty$, in which the student has an infinite number of homework assignments.

3. Solution and Generalizations

3.1. The General Case without Missing Homework

In order to solve our original problem, we will first study a more general case, which can then be applied to obtain our solution. This approach allows us to apply our results to a wider range of problems and reveals a beautiful hidden link between our problem and the Fibonacci numbers.

Therefore, we will start the proof by solving the following general problem:

Problem (General Case, No Missing Homework)**.** Let n, k be positive natural numbers. A university course consists of n lectures, and the professor gives homework to his students at each lecture. Each homework will be marked by the professor by either P (pass) or F (fail). In order to qualify for the final exam, a student must have no k consecutive homework fails and no missing homework. If we denote by $x_{n,k}$ the number of ways a student can organize his homework to qualify for the final exam, determine $x_{n,k}$.

We begin by analysing a few special cases for small k, before moving on to prove our main result. To ease notation, we will suppress the subscript k in $x_{n,k}$ in this section.

Case I: $k=1$

This means that the student should never be marked with F or, equivalently, he should always be marked with P.

Obviously in this situation, we only have one possibility, namely n consecutive passes. We have

$$x_n = 1 \quad \text{for all } n.$$

Case II: $k=2$

This means that if the student is marked with F, he has to be marked with P for his next homework.

First, we will analyse a few particular cases for n:

- $n=1$

  The student can be marked either with P or with F (in order to qualify for the final exam). Obviously this leads us to

  $$x_1 = 2.$$

- $n=2$

  The student can receive either 0 Fs or only one F for homework no. 1 or homework no. 2. This leads us to

  $$x_2 = 1+2 = 3.$$

- $n = 3$

  The student can receive

  - 0 Fs; or
  - only one F for homework no. 1, homework no. 2 or homework no. 3; or
  - 2 Fs for homework no. 1 and homework no. 3.

  This leads us to

  $$x_3 = 1 + 3 + 1 = 5.$$

- $n = 4$

  The student can receive

  - 0 Fs; or
  - only one F for homework no. 1, homework no. 2, homework no. 3 or homework no. 4; or
  - 2 Fs for homework
    - no. 1 and no. 3
    - no. 1 and no. 4
    - no. 2 and no. 4.

  This leads us to:

  $$x_4 = 1 + 4 + 3 = 8.$$

- $n = 5$

  The student can receive:

  - 0 Fs; or
  - only one F for homework no. 1, homework no. 2, ... or homework no. 5; or
  - 2 Fs for homework
    - no. 1 and no. 3
    - no. 1 and no. 4
    - no. 1 and no. 5
    - no. 2 and no. 4
    - no. 2 and no. 5
    - no. 3 and no. 5
  - 3 Fs (without being any 2 consecutive Fs) for homework no. 1, 2 and 3.

  This leads us to

  $$x_5 = 1 + 5 + 6 + 1 = 13.$$

As you can see, this case by case analysis is getting more and more difficult and involved for higher values of n, and it wouldn't be easy to find a 'by hand' solution for the case $n = 14$ needed for our original problem.

Therefore, we will try a different approach and we will try to determine the value of x_n not by an explicit formula but by a recurrence relation. This idea was inspired by noticing that $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$, $x_4 = 8$, $x_5 = 13$ is part of the famous *Fibonacci sequence*.

Definition (Fibonacci sequence)**.** The Fibonacci sequence is defined by the following recurrence relation:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ for all } n \geq 2$$

with initial conditions $F_0 = 1$, $F_1 = 1$.

We hence would like to prove that:

***Proposition* 1.** *In the case $k = 2$, $(x_n)_{n\geq 1}$ satisfies the following recurrence relation:*

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ for all } n > 2$$

with initial conditions $x_1 = 2$, $x_2 = 3$.

Proof. We consider two cases, based on the student's first homework outcome.

If we assume that the student's number 1 homework is marked with P, then for the next $n-1$ homework assignments the student finds himself in the $n-1$ case i.e. the student can receive for assignments 2 to n any arrangement of Ps and Fs that would be admissible if he had instead $n-1$ assignments in total. Thus, if homework number 1 is marked with P, then the number of ways in which the student can organize his homework to qualify for the final exam is x_{n-1}.

If we assume that the student's number 1 homework is marked with F, then it is necessary for him to receive P for his second homework. For the next $n-2$ homework assignments he has no further restrictions and so he finds himself in the $n-2$ case. Thus, if homework number 1 is marked with F, then the number of ways in which the student can organize his homework to qualify for the final exam is x_{n-2}.

In conclusion, taking into account the 2 situations above, we conclude

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \text{ for all } n \geq 3.$$

The initial conditions were determined in the case-by-case work above. □

We are now finally ready to tackle the case for general $k \geq 3$.

Case III: $k \geq 3$
We will take into consideration the following situations for n:

- $n < k$

  The student can receive for any homework either P or F, without any restriction, since it is impossible to receive k consecutive Fs. Therefore, in this case,

  $$x_n = 2^n,$$

  because x_n represents the number of functions from the set $\{1, 2, \dots n\}$ to the set $\{P, F\}$.

- $n = k$

  The only situation which the student has to avoid is to receive for all homework the mark F. Therefore, keeping in mind the $n < k$ case, we have

  $$x_n = 2^n - 1.$$

- $n > k$

  Similarly to the $k = 2$ case, we take into consideration the first k homework assignments. In order for the student to qualify for the final exam, at least one of the first k assignments has to be marked with a P. We denote by i the number of the first homework which is marked with a P. We must have $1 \leq i \leq k$. So, assignments 1 through $i-1$ are marked with an F, assignment i is marked with a P and then, for the next $n-i$ homework assignments, the student finds himself in the $n-i$ case, so he has x_{n-i} ways of receiving marks and qualifying for the final exam. Therefore, iterating over the different values of i we obtain that

  $$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} + \ldots + x_{n-k}.$$

Taking into account the whole discussion, we have proved the following:

***Proposition* 2.** *For $k \geq 1$ we have that $(x_{n,k})_{n\geq 1}$ satisfies the following recurrence relation:*

$$x_{n,k} = x_{n-1,k} + x_{n-2,k} + \ldots + x_{n-k,k}, \quad \text{for all } n > k$$

with initial conditions

$$x_{n,k} = 2^n \text{ for } 1 \leq n \leq k-1, \quad x_{k,k} = 2^k - 1.$$

3.2. Solving the Original Problem

We now have all the tools necessary to solve the original problem.

First, a discussion about how missing homework affects a chain of consecutive Fs is needed. We have chosen to assume that a missing homework does not reset the number of consecutive fails, as that would create a bad incentive for the student to miss a homework if he failed the last two. Hence, using our assumption, a sequence of the type $PFMFP$ is allowed, where M denotes a missing homework, while a sequence like $PFFMF$ is not because it contains three consecutive fails.

Since there are two questions, we begin by tackling the first one, namely that there are 14 assignments and the student qualifies for the final exam only if he does not have more than one missing homework and no more than two consecutive fails. We consider two cases:

- The student has a missing homework:

  The missing homework can be in one of the 14 places. Independently of which homework is missed, ignoring it, the student then has 13 homework assignments in which he must not have more than 2 consecutive failures. So, this case is equivalent to $n = 13$ and $k = 3$ in the general case. Hence, we must find $x_{13,3}$.

  Applying the recurrence formula obtained previously, we find that:

$$\begin{cases} x_{1,3} = 2 \\ x_{2,3} = 4 \\ x_{3,3} = 7 \\ x_{4,3} = 13 \\ x_{5,3} = 24 \\ x_{6,3} = 44 \\ x_{7,3} = 81 \\ x_{8,3} = 149 \\ x_{9,3} = 274 \\ x_{10,3} = 504 \\ x_{11,3} = 927 \\ x_{12,3} = 1705 \\ x_{13,3} = 3136 \end{cases}$$

  We obtain in this case $x_{13,3} \times 14 = 3136 \times 14 = 43904$ ways in which a student can qualify for the final exam.

- The student has no missing homework:

  This is equivalent to the general case with $n = 14$ and $k = 3$. So, in this case there are $x_{14,3} = x_{13,3} + x_{12,3} + x_{11,3} = 3136 + 1705 + 927 = 5768$ ways in which a student can qualify for the final exam.

Therefore, the student can qualify for the final exam in: $43904 + 5768 = 49672$ ways in total.

We now tackle the second part of the original problem, in which the consecutive requirement is removed. Again, we consider two different cases:

- The student has a missing homework:

  We can place the missing homework in 14 ways and then we have 13 other homework assignments to consider. We can only have 0, 1 or 2 fails.

  When we don't have any fails, we have only one possible arrangement, namely all passes.

If there is one failed homework, there are 13 positions in which it can be placed.

For two fails, the first has 13 possible positions in which it can be placed, and the second is left with 12. We will divide the product by two in order to count every combination only once, since the two fails are indistinguishable. Therefore, we obtain $1+13+\frac{13\times 12}{2}=92$ ways.

We multiply the resulting sum by 14 to account for the placement of the missing homework. In conclusion, the student can qualify for the final exam in: $14\times 92=1288$ ways.

- The student has no missing homework:

  Similarly to the previous case, we calculate the number of ways in which the failed homework assignments can be positioned, this time taking into consideration that we now have 14 positions to fill. We follow the same case by case approach to find that the student can qualify for the final exam in $1+14+\frac{14\times 13}{2}=106$ ways.

Therefore, in total we have $1288+106=1394$ ways in which the student can qualify for the final exam. Thus, we have solved the original problem. Moreover, through Proposition 2 we have provided the tools to solve a wide range of similar problems.

3.3. Finding an Explicit Formula for $x_{n,2}$

In one of previous sections we observed that for $k=2$ the recurrence formula for $(x_n)_{n\geq 1}$ coincides with that of the Fibonacci sequence (in this section, we again write x_n instead of $x_{n,2}$ for ease of notation). In fact, we have that $x_n=F_{n+2}$ for all $n\geq 1$. In what follows, we use the standard technique to obtain an explicit formula for F_n and use it to get an explicit formula for x_n.

So, subject to the following initial conditions:

$$\begin{cases} F_0=0 \\ F_1=1 \end{cases}$$

we look to solve:

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1} \quad \text{for all } \; n\geq 1. \tag{1}$$

We will try a solution of the type $F_n=s^n$ for all $n\geq 0$, for some $s\in\mathbb{R}^*$. Such a solution satisfies (1) if and only if

$$s^{n+1}=s^n+s^{n-1} \quad \text{for all } n\geq 1.$$

We divide by $s^{n-1}\neq 0$ and we obtain that (1) is satisfied if and only if $s^2=s+1$ i.e. $s^2-s-1=0$. The only solutions to this quadratic are $\phi:=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\psi:=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Now, we try to combine the two solutions to (1) obtained above, $(\phi^n)_{n\geq 1}$ and $(\psi^n)_{n\geq 1}$, to fit the initial conditions (1). Hence we try a solution of the form: $F_n=A\phi^n+B\psi^n$.

We look for A and B such that the initial conditions are satisfied. We have:

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A\phi+B\psi=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B(\psi-\phi)=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ B\times(-\sqrt{5})=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} A=\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ B=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}. \end{cases}$$

So, now we have the general formula for F_n, for all $n \geq 1$:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Since $x_n = F_{n+2}$ for all $n \geq 1$ we have:

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}.$$

3.4. Introducing Probabilities

We now introduce a new level of generality to our problem.

Problem (General Case with Probabilities)**.** Let n, k be positive natural numbers, $p \in [0,1]$. A university course consists of n lectures, and the professor gives homework to his students at each lecture. Each homework will be marked by the professor by either P (pass) or F (fail). In order to qualify for the final exam, a student must have no k consecutive homework fails and no missing homework. Suppose that for a particular student each homework assignment is marked with a pass with probability p and a fail with probability $q := 1-p$, independently of the other assignments. If we denote by $y_{n,k,p}$ the probability that the student qualifies for the final exam, determine $y_{n,k,p}$.

In the following discussion, we consider some particular fixed p and, when the value of k is clear, we suppress the p and k indices in $y_{n,k,p}$ for ease of notation.

Similarly to the non-probabilistic case, we try to obtain a recurrence formula by examining when the first P occurs.

***Proposition* 3.** *For $k \geq 1$ we will prove that $(y_{n,k,p})_{n\geq 1}$ satisfies the following recurrence relation:*

$$y_{n,k,p} = \sum_{i=1}^{k} p\, q^{i-1} y_{n-i,k,p} \quad \textit{for all } n > k$$

with initial conditions $y_{n,k,p} = 1$ for $1 \leq n \leq k-1$, $y_{k,k,p} = 1 - q^k$.

Proof. We shall make use of the following theorem from probability theory:

***Theorem* 1** (The Law of Total Probability)**.** *Let $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ be a probability space and let $B_1, B_2, \ldots, B_m \in \mathscr{F}$ be a finite partition of Ω (in other words, a set of non-empty pairwise disjoint events whose union is the entire sample space) such that $\mathbb{P}(B_i) > 0$ for all i. Then, for any event A we have*

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(A \mid B_i)\mathbb{P}(B_i).$$

Let A be the event that the student qualifies for the final exam. Now, using the theorem shown above we obtain:

$$\begin{aligned} y_n &= \mathbb{P}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ on homework } i) \times \mathbb{P}(\text{first } P \text{ on homework } i) \\ &\quad + \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ after homework } k) \times \mathbb{P}(\text{first } P \text{ after homework } k). \end{aligned}$$

We notice that $\mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ after homework } k) = 0$ because, by definition A and 'first P after homework k' cannot happen simultaneously. Also, we note that $\mathbb{P}(\text{first } P \text{ on homework } i) = q^{i-1} \cdot p$ by independence of the marks, since we need a fail on the first $i-1$ assignments, each with probability q, and a pass in the i^{th} assignment, with probability p. Our equation becomes:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ on homework } i) \cdot q^{i-1} \cdot p.$$

We know that the remaining grades after a P behave the exact same way as a new sequence of grades so we naturally deduce that $\mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ on homework } i) = y_{n-i}$. We get the desired result:

$$y_n = \sum_{i=1}^{k} y_{n-i}\, q^{i-1} p. \quad (2)$$

□

To conclude this section, we note that if we choose $p = 0.5$ then we can recover the results of section 3.1. We can do this by noting

$$y_{n,k,0.5} = \frac{x_{n,k}}{2^n} \quad \text{for all } n, k \geq 1.$$

This formula holds since all the possible arrangements in $x_{n,k}$ have the same probability of happening in this case, namely $\frac{1}{2^n}$. In this sense, this section is a true generalization of the discussion in section 3.1.

3.5. Finding an Explicit Formula for $y_{n,2,p}$

In this section we will write y_n again instead of $y_{n,2,p}$ for ease of notation.

Subject to the following initial conditions:

$$\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = 1 - q^2 = p^2 + 2pq \end{cases}$$

we look to solve:

$$y_n = p y_{n-1} + pq y_{n-2} \quad (2)$$

We shall only consider the case $p > 0$ as the case $p = 0$ is trivial and gives $y_n = 0$ for all $n \geq 2$.

We will try a solution to (2) of the type $y_n = t^n$ for all $n \geq 1$ for some $t \in \mathbb{R}^*$. This satisfies (2) if and only if:

$$t^n = pt^{n-1} + pqt^{n-2} \quad \text{for all } n \geq 3.$$

We divide by $t^{n-2} \neq 0$ and we obtain $t^2 = pt + pq$. This quadratic has discriminant $\Delta = p^2 + 4pq > 0$. We obtain two solutions $\Phi := \frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2}$ and $\Psi := \frac{p-\sqrt{p^2+4pq}}{2}$ that satisfy the recurrence relation and we will now try to combine them to satisfy the initial conditions.

Hence we try a solution to (2) of the form $y_n = A \cdot \Phi^n + B \cdot \Psi^n$.

We look for A and B such that the initial conditions are satisfied. We get:

$$\begin{cases} A \cdot \Phi + B \cdot \Psi = 1 \\ A \cdot \Phi^2 + B \cdot \Psi^2 = p^2 + 2pq \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{1-B\Psi}{\Phi} \\ \frac{1-B\Psi}{\Phi} \cdot \Phi^2 + B\Psi^2 = p^2 + 2pq. \end{cases}$$

The second equation simplifies to $B \cdot \Psi(\Psi - \Phi) = p^2 + 2pq - \Phi$. After plugging in the explicit formulas for Ψ and Φ we get

$$B\left(\sqrt{p^2+4pq} - p\right)\sqrt{p^2+4pq} = 2p^2 + 4pq - p - \sqrt{p^2+4pq}$$

which reduces to

$$B = \frac{2p^2+4pq-p-\sqrt{p^2+4pq}}{\left(\sqrt{p^2+4pq}-p\right)\sqrt{p^2+4pq}} = \frac{p^2+3pq-\sqrt{p^2+4pq}}{\left(\sqrt{p^2+4pq}-p\right)\sqrt{p^2+4pq}}.$$

Plug this into $A = (1-B\Psi)/\Phi$ to get

$$A = \frac{p^2+3pq+\sqrt{p^2+4pq}}{\left(\sqrt{p^2+4pq}+p\right)\sqrt{p^2+4pq}}.$$

In the end, we obtain:

$$\begin{aligned} y_n &= \frac{p^2+3pq+\sqrt{p^2+4pq}}{\left(\sqrt{p^2+4pq}+p\right)\sqrt{p^2+4pq}}\left(\frac{p+\sqrt{p^2+4pq}}{2}\right)^n \\ &+ \frac{p^2+3pq-\sqrt{p^2+4pq}}{\left(\sqrt{p^2+4pq}-p\right)\sqrt{p^2+4pq}}\left(\frac{p-\sqrt{p^2+4pq}}{2}\right)^n \quad \text{for all } n \geq 1. \end{aligned}$$

3.6. Infinite Homework

We now consider the impossible but mathematically interesting case in which the number of homework assignments n is infinite. More precisely, we try to solve the following problem:

Problem (Infinite Homework)**.** Let k be a positive natural number, $p \in [0,1]$. A university course consists of an infinite number of lectures labeled by the natural numbers, and the professor gives homework to his students at each lecture. Each homework will be marked by the professor by either P (pass) or F (fail). In order to qualify for the final exam, a student must have no k consecutive homework fails and no missing homework. Suppose that for a particular student each homework assignment is marked with a pass with probability p and a fail with probability $q := 1-p$, independently of the other assignments. If we denote by $y_{\infty,k,p}$ the probability that the student qualifies for the final exam, determine $y_{\infty,k,p}$.

***Proposition* 4.** *We have $y_{\infty,k,p} = 0$ if $p < 1$ and $y_{\infty,k,p} = 1$ if $p = 1$.*

Proof. As before, in what follows we write y_∞ for $y_{\infty,k,p}$ to ease notation.

Clearly, if $p = 1$ the student always receives a P so he always qualifies for the exam. Hence, $y_\infty = 1$.

Now suppose $p < 1$ and let A be the event that the student qualifies for the final exam. We use the same technique as in Proposition 3 to obtain that:

$$\begin{aligned} y_\infty &= \mathbb{P}(A) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ on homework } i) \times \mathbb{P}\ (\text{first } P \text{ on homework } i) \\ &+ \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ after homework } k) \times \mathbb{P}\ (\text{first } P \text{ after homework } k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{P}(A \mid \text{first } P \text{ on homework } i) \times q^{i-1}p + 0 \times q^k \\ &= \sum_{i=1}^{k} y_\infty q^{i-1} p \end{aligned}$$

where we have used the fact that after we receive a pass, by independence, we find ourselves back where we started, with an infinite amount of homework ahead of us which we cannot fail k times consecutively. Hence, as $p = 1-q$:

$$0 = \left(1 - p\sum_{i=1}^{k} q^{i-1}\right) y_\infty = \left(1 - p\,\frac{1-q^k}{1-q}\right) y_\infty = q^k y_\infty.$$

Thus, $y_\infty = 0$ since $q^k = (1-p)^k > 0$.

□

4. Conclusion

The original problem presented above, although simple in appearance, is full of interesting avenues to explore. In this article we have presented just a few of them but one can imagine a lot of other different generalizations both to the original problem and to some of the results presented above. In particular, we note that the results in sections 3.3 and 3.5 can be extended using the same method for $k > 2$ if one wishes to obtain explicit formulas.

This project has given us the opportunity to learn about recurrence relations, the Fibonacci numbers, probability and mathematical modelling as well as how to use $\LaTeX$.

Editing Notes

(1) Indeed, this is the standard method for solving a linear recurrence equation like (1): any linear combination $(A\phi^n + B\psi^n)_{n\geq 0}$ of two solutions still satisfies the recurrence equation, and if moreover the first two terms are equal to those of $(F_n)_{n\geq 0}$, it will follow by induction that $F_n = A\phi^n + B\psi^n$ for all $n \geq 0$.

(2) It remains to verify that the initial values are those given in the statement of the proposition, $y_{n,k,p} = 1$ for $1 \leq n \leq k-1$ and $y_{k,k,p} = 1 - q^k$. The argument is the same as in section 3.1: for $1 \leq n \leq k-1$, we have $y_n = 1$ since it is impossible to receive k consecutive fails, and for $n = k$, $y_n = 1 - q^k$ since the student qualifies for the final exam unless he/she fails all k homeworks.

Tours de trinques

Année 2022 – 2023

Antonin Chemin, Rose-Eva Colombat, Line Signoret , Fanny Soupizet,
élèves en classe de terminale

Établissement : Lycée Jean Puy (Roanne)

Enseignantes : Christine Gotte, Laurie Martinelli

Chercheur : Frédéric Chardard, Université Jean Monnet, St Etienne

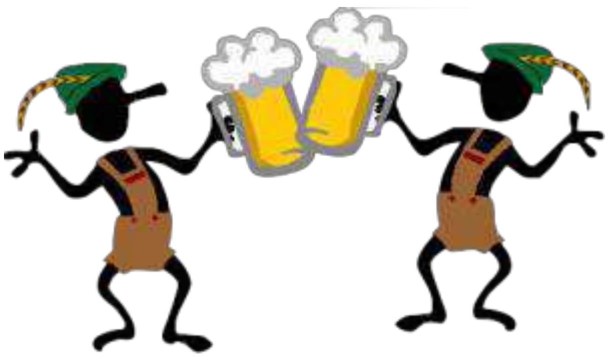
Présentation du sujet

Un groupe de n personnes se réunit dans un bar. Après avoir commandé leurs boissons elles ont pour objectif de trinquer une fois avec chacun le plus vite possible. Mais deux règles leurs sont imposées :

- elles ont interdiction que leurs bras se croisent quand elles trinquent.
- elles ne pourront trinquer qu'avec une seule personne à la fois.

Par conséquent elles devront procéder à plusieurs « tours de trinques », pour qu'elles puissent toutes trinquer avec tout le monde.

Le problème est de déterminer combien il faut de tours de trinques au minimum.



Résultats

En notant n le nombre de personnes qui souhaitent trinquer, nous avons démontré que :

- Le nombre total de trinques à réaliser est $n(n-1)/2$.
- Dans le cas où n est impair, la solution optimale est donnée par n tours de trinques avec $(n-1)/2$ trinques à chaque tour.
- Dans le cas où n est pair et supérieur à 2, la solution optimale est donnée par n tours de trinques.

1. Définitions

Nous avons commencé par définir quelques mots :

→ Trinque : un choc entre deux verres de deux personnes.

→ Tours de trinque : C'est un temps durant lequel plusieurs personnes réalisent une trinque avec une autre en respectant les règles.

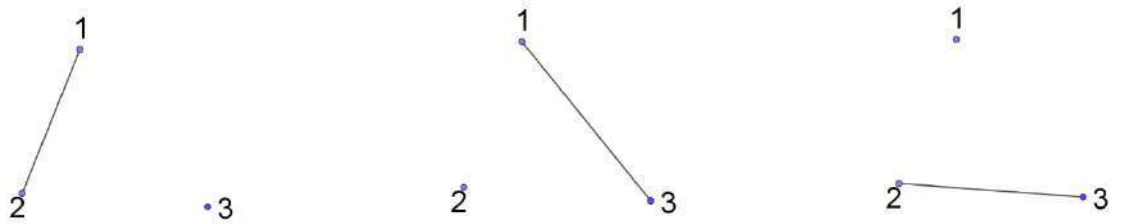
On appelle n le nombre de personnes du groupe, $n \in \mathbb{N}$.

2. Premiers exemples

Pour commencer nous avons essayé avec des petits groupes :

Deux personnes : $n = 2$, évident il faut un tour de trinque

Trois personnes : $n = 3$, Il n'y en a que 2 qui peuvent trinquer en même temps donc il faudra 3 tours de trinque.



1er tour 2e tour 3e tour

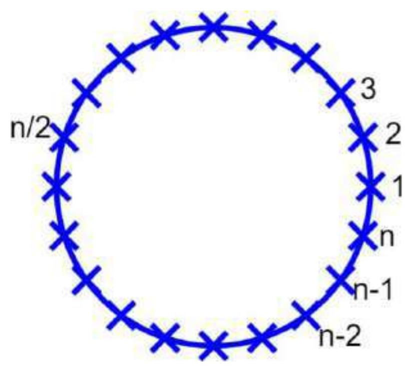
Première remarque : dans le cas d'un nombre impair de personnes, à chaque tour 1 personne ne peut pas trinquer car chaque trinque implique deux personnes.

Nous avons fini par trouver un lien entre tous les tours et le nombre de tours de trinques nécessaires. En effet le nombre de tours minimums semble correspondre au nombre de personnes n (excepté le cas $n = 2$ qui nécessite seulement un tour).

Conjecture : Pour un groupe de n personnes, le nombre de tours de trinques minimum est n.

3. Quelques formules

Pour rendre l'expérience plus lisible, nous avons décidé de représenter la situation en plaçant les n personnes en cercle en les numérotant de 1 à n dans le sens inverse des aiguilles d'une montre (ceci n'a aucune incidence sur la résolution du problème) et ceci pour $n \geq 3$.



a) Déterminons le nombre de trinques total

C'est une combinaison de 2 éléments pris parmi n donc il y en a $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$.

On peut aussi raisonner en disant que le nombre de trinques total est donné par :

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

On note n le nombre de personnes autour de la table.

Or nous avons comptabilisé 2 fois chaque trinque entre deux personnes (ex : 1 trinque avec 3 et 3 avec 1) donc il faut diviser par 2.

Chaque personne doit trinquer avec toutes les autres donc n personnes doivent trinquer avec $(n-1)$ personnes ce qui fait $n(n-1)$ trinques.

Remarque : C'est aussi $(n-1)+(n-2)+\cdots+0$ (la première personne trinque avec les $(n-1)$ autres, la deuxième doit trinquer avec les $(n-2)$ qui restent, etc.

b) Déterminons le nombre de trinques maximum par tour

Pour le cas n pair : il y a $n/2$ trinques possibles par tour car une trinque associe 2 personnes parmi les n.

Pour le cas n impair : il y a $(n-1)/2$ trinques possibles par tour car une trinque associe 2 personnes parmi les n donc il y en aura une à chaque tour qui ne pourra pas trinquer.

c) Déterminons alors le nombre de tours minimum

On peut donc en déduire :

Pour le cas n pair : on divise le nombre de trinques total par le nombre maximum de trinques par tour, c'est-à-dire $\frac{n(n-1)/2}{n/2} = n-1$ donc **dans le cas n pair, il faudra au minimum $n-1$ tours.**

Pour le cas n impair : $\frac{n(n-1)/2}{(n-1)/2} = n$ donc **dans le cas n impair, il faudra au minimum n tours.**

4. Est-ce réalisable ? Et comment ?

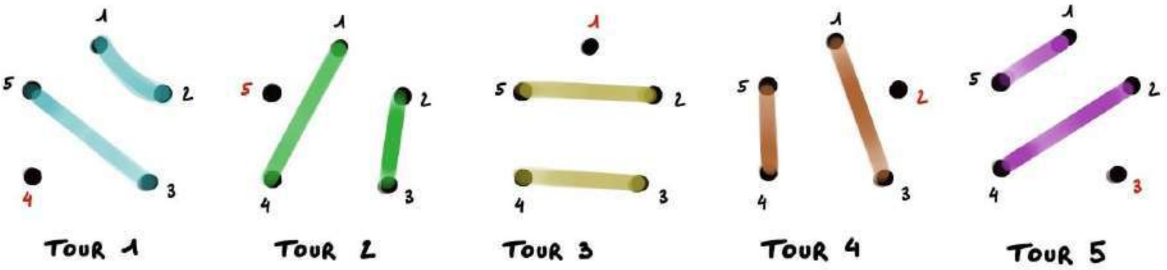
A. Cas d'un nombre de personnes impair : $n = 2p+1, p$ entier naturel.

Objectif : essayer de faire des tours qui comportent $p = \frac{n-1}{2}$ trinques.

Dans nos exemples précédents, nous avons vu que cela était possible pour $n = 3$ personnes.

Illustrations pour $n = 5$

On a une solution optimale car chaque tour comporte 2 trinques donc il faut 5 tours.



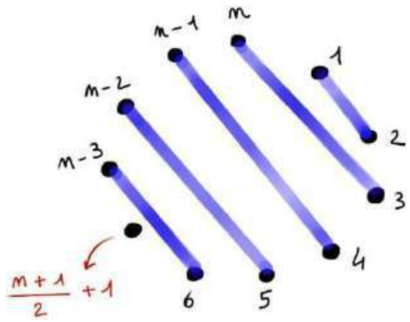
Cette proposition est une solution optimale car chaque tour comporte $(n-1)/2 = 2$ trinques. Et au total on a $5 \times 2 = 10$ trinques ce qui correspond au nombre total de trinques $n(n-1)/2$.

On déduit qu'il faut $n = 5$ tours minimum pour que tout le monde trinque.

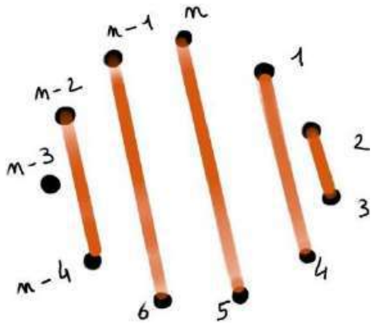
Nous avons remarqué que le procédé employé pour cet exemple peut être généralisé pour tout autre exemple du cas n impair.

<u>Illustration tour 1 et tour 2 pour n = 11</u>

Tour 1 :



Tour 2 :



Pour chaque couple de trinque : On soustrait un à la première personne du couple et on ajoute 1 à la deuxième personne du couple sachant que l'on passe de n à 1.

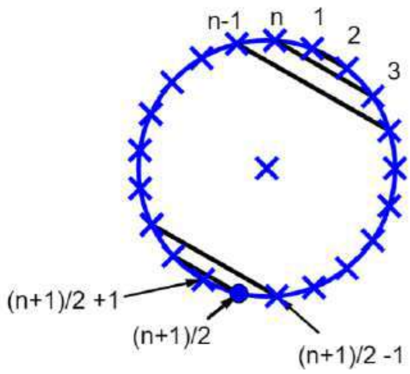
Trinques :

Tour n°1	Tour n°2
$(1\ ;\ 2)$	$(2\ ;\ 3)$
$(n\ ;\ 3)$	$(1\ ;\ 4)$
$(n-1\ ;\ 4)$	$(n\ ;\ 5)$
$(n-2\ ;\ 5)$	$(n-1\ ;\ 6)$
$(n-3\ ;\ 6)$	$(n-2\ ;\ 7)$

On continue ainsi pour les tours suivants jusqu'à ce que n trinque avec 1.

<u>Dans le cas général pour n impair</u>, il y aura toujours, pour **le premier tour** les trinques suivantes :

$(1\,;2)$
$(n\,;3)$
$(n-1\,;4)$
$(n-2\,;5)$
$(n-3\,;6)$
…
Jusqu'aux numéros : $((n+1)/2)+2;\ (n+1)/2))$



Au tour suivant, les couples de trinques s'obtiennent à partir des couples de trinques du premier tour en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.
Puis, on recommence. Ainsi les couples de trinques du tour $k+1$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

On a donc au total n tours avec $(n-1)/2$ trinques à chaque tour ce qui est la solution optimale. (1)

On a créé un programme python pour modéliser cela, qui montre comment trinquer pour n personnes, lors d'un tour quelconque tour demandé. (2)

```
from math import*
n=int(input("entrez le nombre de personnes présentent au bar:"))
print ("il y aura alors,",n,"tours de trinques")
t=int(input('entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n:'))
N=int(((n-1)/2)+1)
V=(t)
U=(1+t)
W=int(((n+1)/2)+1) # on défini celui qui ne trinquera avec personne
print("pour le tour n°",t,":")

for k in range(1,N):
    if V>n:
        V=V-n
    if U>n:
        U=U-n
    if U==0 :# si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
        U=n
    if V==0 :# si v tombe a 0 on redémarre avec v = n
        V=n
    if W>n:
        W=W-n
    if W==0 :# si w tombe a 0 on redémarre avec w = n
        W=n

    print(U,"trinque avec",V)
    V=V-1
    U=U+1
    W=W+1

print(W,"ne trinquera avec personne durant ce tour!")
print("il vous reste encore",n-t,"tours pour que tout le monde ait trinqué avec tout le monde.")
```

Résultat du programme pour $n = 11$:

```
>>> (executing file "programme impair BON.py")
entrez le nombre de personnes présentent au bar: 11
il y aura alors, 11 tours de trinques
entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n: 9
pour le tour n° 9 :
10 trinque avec 9
11 trinque avec 8
1 trinque avec 7
2 trinque avec 6
3 trinque avec 5
4 ne trinquera avec personne durant ce tour!
il vous reste encore 2 tours pour que tout le monde ait trinqué avec tout le monde.
```

B. Cas d'un nombre de personnes pair : $n = 2p$, p entier naturel .

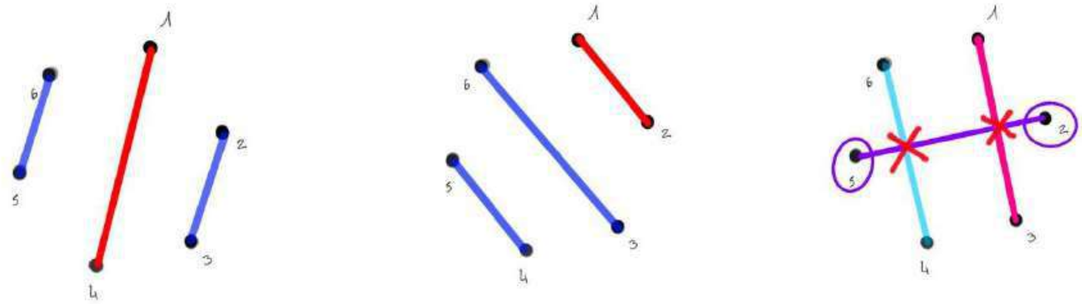
Nous avons conjecturé sur nos exemples qu'il fallait n tours minimum pour n personnes, or nous avons démontré que le nombre de tours minimum possible est $n - 1$.
Il va donc falloir prouver qu'on ne peut pas réaliser toutes les trinques en $n - 1$ tours.

Ce nombre de tours de trinques $n - 1$ n'est pas réalisable à cause de l'interdiction de croiser les bras : il faudra donc rajouter un tour de plus. En effet, quand la personne 1 trinque avec la 2, les autres peuvent toutes trinquer ensemble, de même quand la 1 trinque avec la 4,…. (cf illustrations ci-dessous).

Par contre quand la personne 1 trinque avec la personne 3 (ou avec 5) il est impossible à tous de trinquer ensemble car des bras vont se croiser. Pourquoi ?

Car le nombre de personnes qui séparent le 1 et le 3 (ou le 1 et le 5) est impair et donc ils ne peuvent pas former un ou des couples de trinques, car il faudrait un nombre pair de personnes.

Ainsi la personne seule devra trinquer avec quelqu'un avant le 1 ou après le 3 (ou le 5) ce qui l'obligerait a croiser les bras avec le couple $(1;3)$, ce qui n'est pas autorisé.



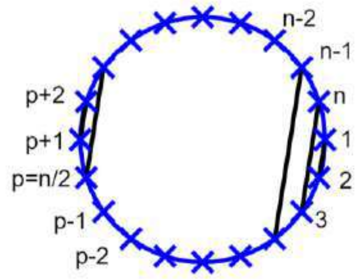
Ainsi il faut n tours au minimum pour réaliser les trinques lorsque le groupe contient un nombre pair de participants : prouvons qu'on peut le réaliser.

Voici comment se passeront les premiers tours :

a) <u>Pour les tours $\leq n/2$:</u>

On optimise avec à chaque tour $p = n/2$ <u>trinques</u> ce qui est le nombre de trinques maximum :

Tour 1 :



→ Couples de trinque :

$(1;\ 2)$
$(n\ ;\ 3)$
$(n\ -\ 1\ ;\ 4)$
....

Dernier : $(\frac{n}{2}+2\,;\frac{n}{2}+1)\ =\ (p+2\,;\,p+1)$

Tour 2 :

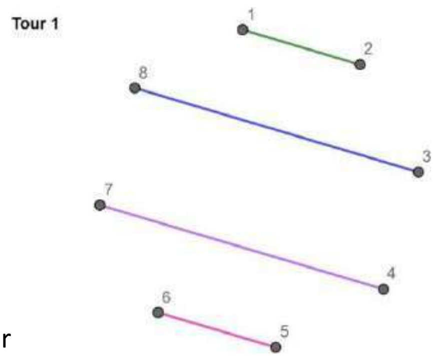
Pour savoir quels couples de personnes trinquent ensemble on rajoute 1 aux couples de trinque du tour 1.

<u>Attention</u> : Lorsque c'est à n que l'on rajoute 1, ce n'est pas $n+1$ mais on le remplace par 1 car celui qui est à côté de n c'est 1.

→ Couples de trinques :

a) $(2\ ;\ 3)$
b) $(1\ ;\ 4)$
c) $(n\ ;\ 5)$
......

Dernier : $\left(\frac{n}{2}+3;\frac{n}{2}+2 = (p+3;p+2\right)$



Exemple : pour $n = 8$ ($p = 4$)

Les personnes poursuivent leurs tours de trinques du 1^er^ tour jusqu'au $\frac{n}{2} = p$-ième tour en suivant la méthode décrite précédemment.

Bilan : Pour k entier entre 1 et $p-1$, les couples de trinques du tour $(k+1)$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

On arrive au denier tour : Tour $\frac{n}{2} = p$:

→ Couples de trinques :

$\left(\frac{n}{2} = p\ ;\ p+1\right)$

$(p-1\ ;\ p+2)$

.....

Dernier : $(1\ ;\ n)$

Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) : **Tour 4 :**

Bilan : Le nombre de trinques total lors de cette première partie est : le nombre de trinques par tour multiplié par le nombre de tours, soit $n/2\ \times n/2 = n^2\ /4$.

b) <u>Pour les tours $> n/2$:</u>

On choisit la personne n° 1, elle et la personne $p+1$ qui ne trinqueront pas.
Il n'y aura donc que $\frac{n}{2} - 1 = p - 1$ trinques à chaque tour.

Tour $\frac{n}{2} + 1 = p + 1$:

→ $p - 1$ couples de trinques
→ couples de trinques :

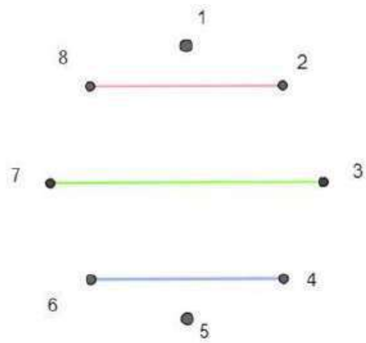
$(2\ ;\ n)$

$(3\ ;\ n-1)$

...

Dernier $\left(\frac{n}{2} ; \frac{n}{2} + 2\right)$ soit $(p\ ;\ p+2)$

Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :



Ce sera 1 et 5 qui ne trinqueront pas pour le tour 5.

Ensuite, pour les couples qui trinquent on prend $1+1$ et $1-1$ que l'on remplace par n, donc 2 et n. Puis pour les autres on rajoute 1 à l'un et on soustrait 1 à l'autre.

Tour $\frac{n}{2} + 2\ = p\ + 2.$

Ensuite au tour suivant, pour savoir quels couples de personnes trinquent ensemble, on rajoute 1 aux couples de trinque du tour précédent. Et cela à chaque fois qu'on change de tour.

Attention : Lorsque c'est à n que l'on rajoute 1, ce n'est pas $n+1$ mais on le remplace par 1 car celui qui est à côté de n c'est 1.

On obtient ainsi les couples suivants :

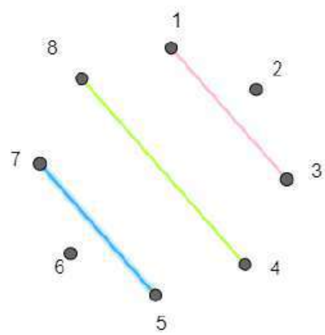
$(3; 1)$

$(4\ ;\ n)$

...

Dernier $(\frac{n}{2} + 1; \frac{n}{2} + 3)$ soit $(p+1;\ p+3)$

Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :



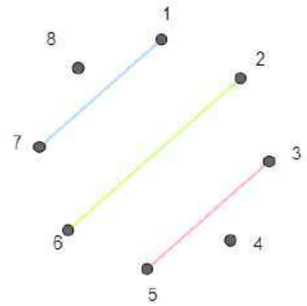
Les personnes poursuivent leurs tours de trinques du tour $p+1$ jusqu'au n-*ième tour* en suivant la méthode décrite précédemment.

Bilan : Pour k entier entre $p+1$ et n, les couples de trinques du tour $k+1$ s'obtiennent à partir des couples de trinques du tour k en ajoutant 1 à chaque numéro et en remplaçant $n+1$ par 1.

Dernier tour (Tour n) :

On obtient ainsi les couples suivant :

$(p+1; p-1)$
$(p+2; p-2)$
…
Dernier $(n-1; 1)$



Exemple pour $n = 8$ ($p = 4$) :

Bilan : Lors de cette deuxième partie, le nombre de trinques est le nombre de tours multiplié par le nombre de trinques par tour, or dans cette partie il y a $n/2 - 1$ trinques par tour, soit en tout $(n/2)(n/2 - 1)$ qui nous donne après simplification : $n\,(n-2)/\,4$ trinques.

Bilan final : on a fait $n/2 + n/2 = n$ tours et $n^2\,/\,4$ trinques puis $n\,(n-2)/\,4$, soit $(n^2 - 2n)/\,4$ trinques, qui nous donne $n^2/\,4 + (n^2 - 2n)/\,4$, soit, après simplification, le nombre de trinques attendues : $n(n-1)\,/2$.
Chacune des trinques étant différente, on a donc illustré le fait qu'on pouvait faire n tours de trinques et que c'était le nombre de tours minimum dans le cas ou n est pair.

En effet, on peut vérifier facilement que 1 trinque avec tout le monde. Il trinque d'abord avec 2, 4, 6,…,$2p$, puis avec 3, 5,…, $2p-1$.

On peut raisonner de même pour les autres personnes.

On a donc créé un autre programme pour modéliser cette deuxième méthode, qui montre comment trinquer pour n personnes, lors d'un quelconque tour demandé.

```
from math import*
n=int(input("entrez le nombre de personnes présentent au bar ( nombre pair ICI) :"))
print ("il y aura alors,",n,"tours de trinques ")
t=int(input("entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n :"))
print("pour le tour n°",t,":")

if t<=n/2:
    u=t
    v= u+1
    for k in range(1,int(n/2)+1): # a chaque tour, il y a n/2 trinques à afficher
        if u==0: # si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
            u=n
        if v>n:  # si v dépasse n on redémarre avec à v = 1
            v=1
        print (u,"trinque avec",v)
        u=u-1
        v=v+1

else:
    u=int(t-n/2) # met en format entier (integer)
    v=u+2
    for i in range(1,int(n/2)):
        if u==0: # si u tombe a 0 on redémarre avec u = n
            u=n
        if v>n:  # si v dépasse n on redémarre avec à v = 1
            v=1 # a chaque tour, il y a n/2 trinques à afficher
        print(u,"trinque avec",v)
        u=u-1
        v=v+1
```

(3)

```
>>> (executing file "cas_pair_.py")
entrez le nombre de personnes présentent au bar ( nombre pair ICI) :8
il y aura alors, 8 tours de trinques
entrez le numéro du tour souhaité compris entre 1 et n : 5
pour le tour n° 5 :
1 trinque avec 3
8 trinque avec 4
7 trinque avec 5

>>>
```

5. Conclusion

Nous tenons à remercier M. Chardard et nos enseignantes pour nous avoir accompagnés cette année dans l'atelier MATh.en.JEANS. Nous avons été ravis de participer au congrès de fin d'année à Grenoble ce qui a permis de donner une autre dimension à notre travail.

Notes d'édition

(1) Ce qui est démontré ici est qu'il y aura bien le bon nombre de trinques mais il n'est pas clair que certaines ne se répètent pas. Pour montrer que tout le monde a bien trinqué avec tout le monde, il faudrait ajouter un petit argument comme cela est fait ensuite dans le cas pair.

(2) Il y a quelques lignes inutiles dans ce code.

(3) Attention, dans ce code les tours sont décalés par rapport à leur description dans le texte. Pour les retrouver dans le même ordre, Il faudrait remplacer la ligne 20 par u=int(t-n/2)-1.

Exposé – Congrès Rio de Janeiro 2023

L'élastique

Année 2022 – 2023

Amrani Hassani Zeyna, Belkhayat Zoukari Alya, Rhmari Tlemçani Lina,
Amouri Mohamed Karim, Guessous Hamza (classe de 3e) et Ben Abbou Adam (classe de 5e)

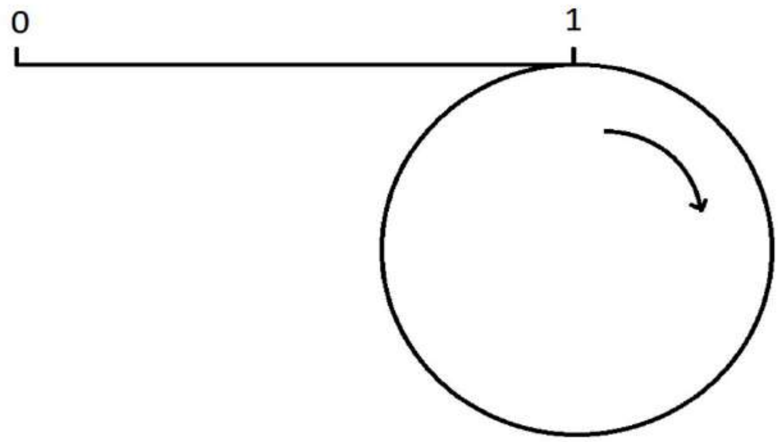
Établissement : Groupe scolaire Jean de la Fontaine de Fès (Maroc), jumelé avec l'École Alsacienne de Paris

Encadré·es par : Sébastien Barry

Chercheur : Emmanuel Bernuau, AgroParisTech

1. Présentation du sujet

Voici le sujet que nous avons choisi.



Un élastique est fixé par un bout à un mur tandis que l'autre extrémité est collée à un disque tournant enduit de colle.

Quand le disque tourne, cela produit deux effets :

1) *Toute partie de l'élastique qui entre en contact avec le disque est collée et ne se déforme plus.*
2) *La partie de l'élastique entre le mur et la zone de contact avec le disque s'étire.*

On constate que quand le disque fait un tour complet sur lui-même, 90% de la longueur initiale a été collée au disque.

Questions :

1) ***Si la longueur initiale de l'élastique est 1, quel est le rayon du disque ?***
2) ***Si on dispose régulièrement des nombres sur l'élastique au départ, à quel endroit ces nombres se retrouvent-ils une fois collés ?***

2. Démarche chronologique

1. Compréhension du problème

Ce problème fut difficile à comprendre, une consigne des plus complexe, des questions que nous collégiens ne traitons pas habituellement, un problème destiné aux lycéens.
Des séances sans avancement, sans résultat : que des fausses pistes qui n'aboutissent à rien.

2. Méthode naïve

La première optique du groupe fut de calculer le rayon du cercle avec une distance de 90 cm collée : 90% de la longueur initiale de 1 mètre.
Nous avons pour cela utilisé la formule permettant de calculer la longueur d'un cercle en fonction de son rayon :

$$\text{longueur d'un cercle} = 2\pi \times \text{rayon}$$

Nous nous sommes ensuite rendu compte que cela ne prenait pas en compte le fait que l'élastique s'étire au fur et à mesure que le disque tourne.

3. Réalisation d'une maquette

Puis nous avons voulu tenter une nouvelle approche, une réalisation de maquette. Nous nous sommes munis d'un élastique de 1m et d'un disque de forme circulaire pour s'approcher le plus du problème initial.
Cette option était complexe et nous n'avons pas été en mesure de l'exploiter de façon efficace.

4. Abandon de la part du groupe

Après ces échecs notre moral en a pris un coup et nous avons envisagé de mettre un terme au projet. Nous sommes restés quelques semaines sans avancer, sans même trouver de piste à explorer, toujours au point de départ.

5. Simplification du problème

Enfin, à la suite d'une rencontre à distance avec le chercheur, nous avons décidé de simplifier le problème. Nous avons remplacé le disque par un polygone régulier avec un petit nombre de côtés pour commencer : d'abord un triangle équilatéral, puis un carré.

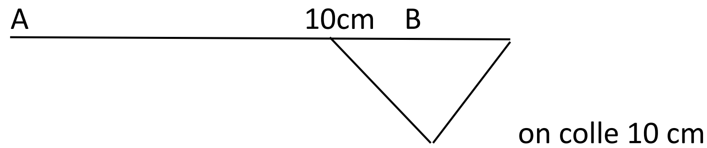
Nous sommes alors parvenus à réaliser nos premiers calculs et à obtenir nos premiers résultats.

3. Résultats obtenus

1. Les premiers calculs

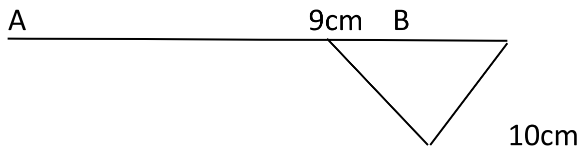
a) Avec un triangle équilatéral de côté 10 cm, on a pu calculer que 27% environ de la longueur initiale de l'élastique est collée au bout d'un tour.

Étape 1 :



Étape 2 :

On étire 90cm en 1m : coefficient k = 100/90
Les dix centimètres que l'on colle correspondent à 10/k de la longueur initiale soit 9 cm



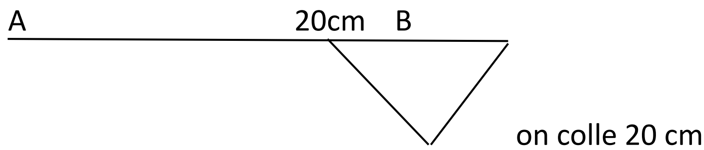
Étape 3 :

On étire 100 - (10+9) = 81 cm en 1 m : k=100/81
Les 10 cm que l'on colle correspondent à 10/k= 8,1 cm de la longueur initiale

10+9+8.1=27,1

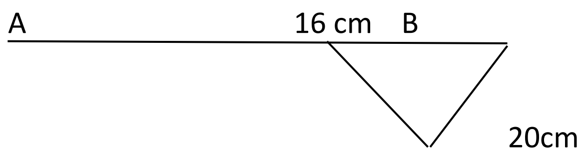
b) Avec un triangle équilatéral de côté 20 cm, 49% de la longueur initiale est collée au bout d'un tour.

Étape 1 :



Étape 2 :

On étire 80 cm en 1m : coefficient k = 100/80.
Les dix centimètres que l'on colle correspondent à 20/k de la longueur initiale soit 16 cm



Étape 3 :

On étire 100 - (20+16) = 64 cm en 1 m : k=100/64.
Les 10 cm que l'on colle correspondent à 20/k=cm de la longueur initiale

20+16+12,8=48,8

c) Avec un carré de côté 10 cm, la même démarche permet de conclure que $10+9+8{,}1+7{,}3=34{,}4\,\%$ environ de la longueur initiale de l'élastique est collée au disque au bout d'un tour complet

$$k_1 = \frac{100}{90} \text{ et } \frac{10}{k_1} = 9$$

$$k_2 = \frac{100}{100-(10+9)} \text{ et } \frac{10}{k_2} = 8{,}1$$

$$k_3 = \frac{100}{100-(10+9+8{,}1)} \text{ et } \frac{10}{k_3} = 7{,}3$$

2. Exploitation de ces résultats

La méthode précédente, par tâtonnements, s'avère un peu fastidieuse. Nous avons donc décidé de créer un programme Scratch afin de pouvoir trouver plus rapidement la longueur approximative de chaque côté de différents polygones, pour atteindre 90% de la longueur initiale de l'élastique collée au bout d'un tour (1).

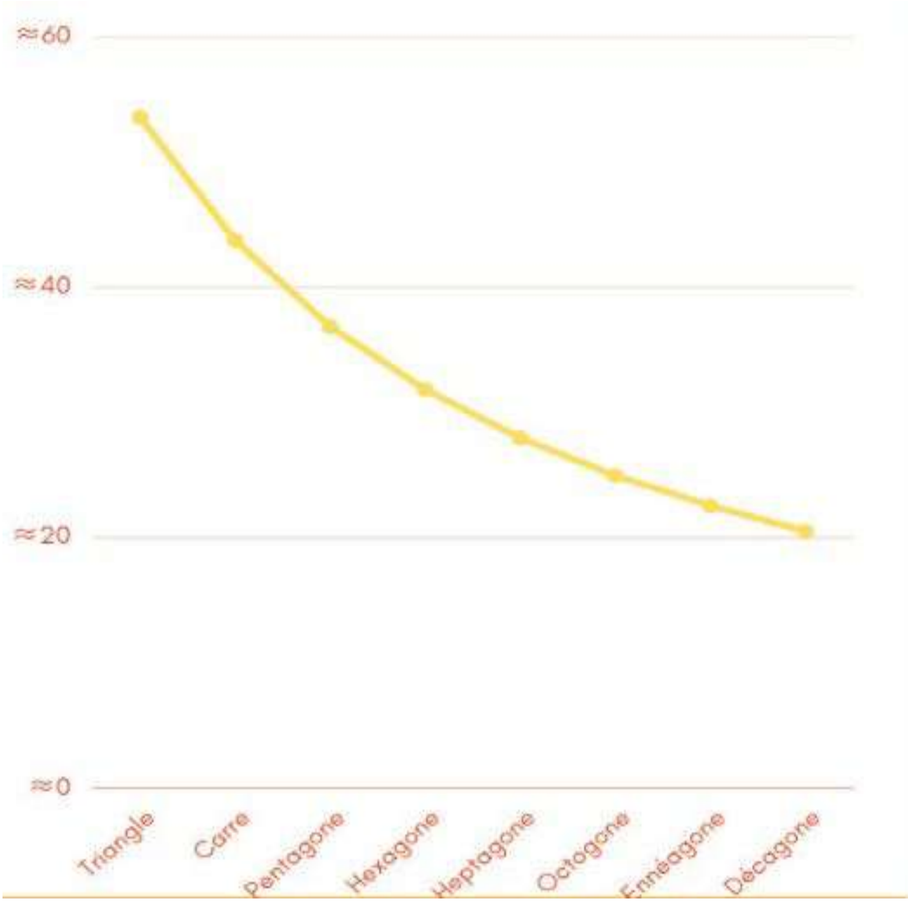
Grâce à ce programme nous avons pu trouver les résultats suivants :

- le triangle équilatéral doit avoir des côtés de 53,584 environ pour que 90% de la longueur initiale de l'élastique soit collée au bout d'un tour.
- pour le carré : ≈ 43,766
- pentagone : ≈ 36,9
- hexagone : ≈ 31,87
- heptagone : ≈ 28
- octogone : ≈ 25
- ennéagone : ≈ 22,6
- décagone : ≈ 20,57

4. Conclusion

Il nous a manqué du temps pour exploiter pleinement ces résultats. Nous n'avons pas pu vraiment en déduire le rayon du disque de départ (2).

À partir de ces données nous avons malgré tout réalisé le graphique suivant, que nous avons malheureusement eu du mal à analyser :



Notes d'édition

(1) Avec le programme Scratch, on procède aussi par tatonnements, sauf que le calcul est fait automatiquement : on entre le nombre de côtés et la longueur d'un côté (en centimètres) ; ensuite la longueur initiale d'élastique collée (variable b) est calculée avec la même méthode que pour les calculs précédents. Il reste alors à ajuster la longueur du côté pour obtenir un résultat aussi proche de 90 que possible.

(2) On peut admettre que lorsqu'on considère un polygone régulier à un grand nombre de côtés, son périmètre est proche de celui du disque recherché. On pourrait donc considérer les périmètres des polygones, en multipliant la longueur trouvée par le nombre de côtés, et ensuite diviser par 2π pour obtenir une approximation du rayon du disque.

Le jeu de Marienbad

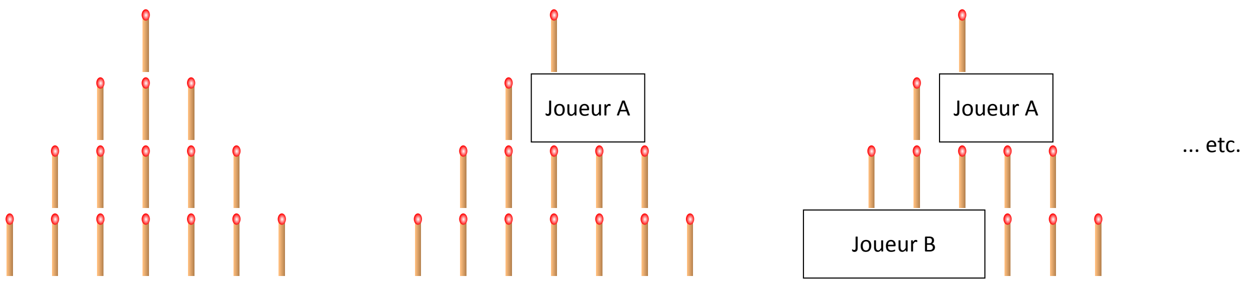
Année 2022-2023

Arthur, Filippo, Tamaz et Titouan, classe de 1ère

Établissement : Lycée de l'Harteloire, Brest
Enseignant : Jean Marie Gourmelon
Chercheur : Rachid Regbaoui, Université de Bretagne Occidentale

1. Présentation du sujet

Le jeu de Marienbad se joue à deux : des allumettes sont disposées en quatre rangs de 1, 3, 5 et 7. Chaque joueur prend alors à son tour le nombre d'alumettes qu'il souhaite dans une seule rangée. Le gagnant est celui qui prend la dernière allumette.



L'un des deux joueurs a-t-il une stratégie gagnante ? Et si on modifie les règles ?

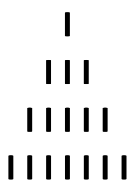


FIGURE 1 – Situation de départ du jeu

2. Démarche

Tout d'abord nous avons commencé par des exemples qui représentent des situations de jeux possibles pour essayer de trouver des points communs entre des situations différentes. Nous avons donc analysé les situations et trouvé que, dans une configuration d'égalité entre plusieurs rangées (dites « miroirs »), le deuxième joueur pouvait facilement gagner en recopiant la façon de jouer du premier joueur ; par exemple, dans une situation de 4 et 4, si le premier joueur enlève 2 allumettes de la première rangée le deuxième doit faire la même chose pour pouvoir gagner la partie.

Afin d'avoir une réponse plus claire (et de tenter de résoudre le problème à l'envers, en partant de la réponse), nous avons résolu le problème d'abord par force brute : écrire un programme, qui va bêtement essayer tous les coups possibles, et envisager toutes les réponses possibles afin d'avoir une réponse certaine. Heureusement, le jeu de Marienbad offre un espace de recherche relativement restreint qui rend cette approche viable (avec quelques optimisations de déduplication et mémorisation), ce qui n'est pas le cas de tous les jeux (*e.g.* Le jeu d'échec qui possède plus de situations possibles qu'il n'y a d'atomes dans l'univers observable). Le programme produit une simple table qui donne le coup gagnant pour chaque situation (si tant est qu'il y en a un). Une démonstration de ce programme est disponible en ligne. Ceci nous a permis de nous diriger vers l'idée que le joueur gagnant serait le deuxième et non le premier comme on le pensait initialement.

Pour ce qui est du reste de la stratégie, nous avons essayé beaucoup de choses différentes, mais aucune n'a eu de vrai résultat (à l'exception des certaine situations spéciales comme celles miroirs). Nous avons finalement été mis sur la voie des paquets de deux par notre chercheur M. REGBAOUI.

3. Une stratégie gagnante pour le deuxième joueur

3.1. Principes généraux

La stratégie gagnante repose sur deux concepts cœurs : La décomposition des rangées en paquets de puissances de deux (uniques), et le principe de parité des paquets.

La décomposition en paquets est le fait qu'il possible de décomposer les allumettes de n'importe quelle rangée en paquets de puissances de deux au sein de la rangée. Par exemple, la situation de départ se décompose ainsi (on remarquera la présence de 4 paquets de 1, 2 paquets de 2 et 2 paquets de 4, des nombres *pairs*) :

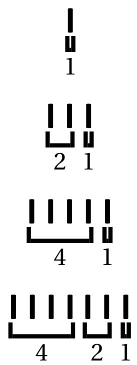


FIGURE 2 – Décomposition de la situation de départ

Le principe de parité classe les situations (de jeu) en deux catégories : les situation « paires » et celles qui ne le sont pas. Est paire une situation dont le nombre de paquets de même taille est pair (c'est le cas de la situation initiale). La parité est importante car elle détermine quelle joueur pourra gagner avec certitude :

une situation paire peut être gagnée à tous les coups par le deuxième joueur, tandis qu'une situation non paire peut l'être par le premier.

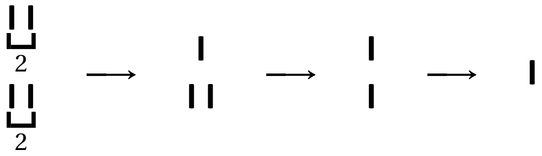


FIGURE 3 – Situation 2 ;2, paire, gagnée par le deuxième joueur

Les situations paires garantissent la victoire au deuxième joueur car il est toujours possible de ramener une situation (d'origine paire), devenue impaire après un coup, à une autre situation paire (qui a moins de bâtons) en un seul coup. Et ceci jusqu'à ce qu'il ne reste plus que deux rangées, car une situation paire ne peut pas n'en avoir qu'une (la décomposition en paquets ne permet pas deux fois le même paquet dans la même rangée, ce qui rend impaires les situations à une rangée). Une fois à deux rangées, les seules situations paires sont les situation dites « miroirs » (car pour que le nombre de paquets soit pair il en faut un dans chacune des deux rangées, car il ne peut y en avoir deux dans une).

3.2. Unicité de la décomposition en paquets de puissances de 2

Le premier prérequis à la stratégie gagnante est l'unicité de la décomposition en paquets de puissances de 2 : on peut décomposer n'importe quel nombre entier positif (*e.g.* le nombre de bâtons dans une rangée) de manière unique en une somme de puissances de deux toutes différentes.

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}$ (1). Alors il existe forcément un p pour lequel $n \geq 2^p > \frac{n}{2}$, car s'il existait un n et un p avec :

$$2^{p+1} > n > \frac{n}{2} \geq 2^p \tag{1}$$

on aurait

$$\frac{n}{2} \geq 2^p$$
$$n \geq 2^{p+1}$$

Or, on sait de l'inéquation (1) que $2^{p+1} > n$, donc :

$$2^{p+1} > n \geq 2^{p+1}$$
$$2^{p+1} > 2^{p+1}$$

Ce qui crée une contradiction.

On a donc $n \geq 2^p$ et $2^p > \frac{n}{2}$, alors $n - 2^p < \frac{n}{2}$ (enlever plus de la moitié de n à n donne moins de la moitié de n).

Pour décomposer un nombre n entier strictement positif en une somme de puissances de 2 uniques on peut donc prendre $n_0 = n$, trouver le p_0 correspondant ($n_0 \geq 2^{p_0} > \frac{n_0}{2}$), et obtenir $n_1 = n_0 - 2^{p_0}$ (ou plus généralement : $n_{k+1} = n_k - 2^{p_k}$).

Si $n_1 > 0$ alors la décomposition continue, et un peut obtenir n_2, n_3, … n_k.

Si $n_k = 0$ alors la décomposition est terminée et on a donc $n = 2^{p_0} + 2^{p_1} + \ldots + 2^{p_{k-1}} + 2^{p_k}$.

On peut être sûr que la décomposition est unique car :

$$
\begin{aligned}
n_{k+1} &= n_k - 2^{p_k} \\
n_k - 2^{p_k} &< \frac{n_k}{2} \\
2^{p_{k+1}} \leq n_{k+1} &< \frac{n_k}{2} < 2^{p_k} \\
2^{p_{k+1}} &< 2^{p_k} \\
p_{k+1} &< p_k
\end{aligned}
$$

Et donc $p_0 > p_1 > \ldots > p_{k-1} > p_k$, et aucune des puissances ne se répète. □

Exemple. Pour 7 (le plus grand nombre dans notre cas) :

$$
\begin{aligned}
n &= 7 \\
n_0 &= 7 \\
p_0 &= 2 \\
n_1 &= n_0 - 2^{p_0} \\
n_1 &= 7 - 4 \\
n_1 &= 3 \\
n_1 &= 1 \\
n_2 &= n_1 - 2^{p_1} \\
n_2 &= 1 \\
p_2 &= 0 \\
n_3 &= 0 \\
n &= 2^{p_0} + 2^{p_1} + 2^{p_2} \\
7 &= 4 + 2 + 1
\end{aligned}
$$

3.3. Rétablissement de la parité

Pour que la stratégie fonctionne il faut que le deuxième joueur puisse maintenir la parité tout au long de la partie, ceci est possible car il est toujours possible de rétablir la parité d'une situation en un seul coup, et que le premier joueur est forcé de la casser à chaque tour (il doit enlever au moins un bâton d'une rangée, or car les paquets pairs ne partagent pas de rangée, il est impossible de jouer sur une situation paire, sans la rendre impaire).

Quand un joueur casse la parité, on peut imaginer qu'il crée et supprime des paquets (2) :

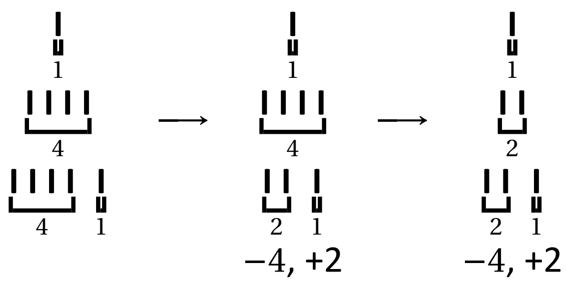


FIGURE 4 – Le joueur 1 supprime un paquet de 4, et crée un paquet de 2.

Pour rétablir la parité, il faut que les valeurs absolues des bilans soient les mêmes : si un paquet de 2 est cassé (-2), alors il faut soit en casser un autre (-2) ou en créer un nouveau (+2) pour maintenir la parité de 2. Le plus gros paquets cassé par le coup du joueur 1 sera aussi cassé par le joueur deux (car il est impossible de créer un paquet sans en casser un plus gros, qui dans ce cas casserait la parité de celui-ci, car il n'a pas été touché par le joueur 1). Dans le cas ou le joueur 1 casse plusieurs paquets d'un coup, il est aussi possible de rétablir, car on peut, en cassant le plus gros paquet créer autant de plus petits paquets que nécessaire, par exemple, on peut casser le paquets de 4 de 4 manières différentes (-4 ; $-4+1$; $-4+2$; $-4+1+2$) il faut donc s'adapter au paquet touché par le coup du joueur 1, ainsi que les potentiels autres paquets présents sur la rangée du paquet qu'on vise à briser.

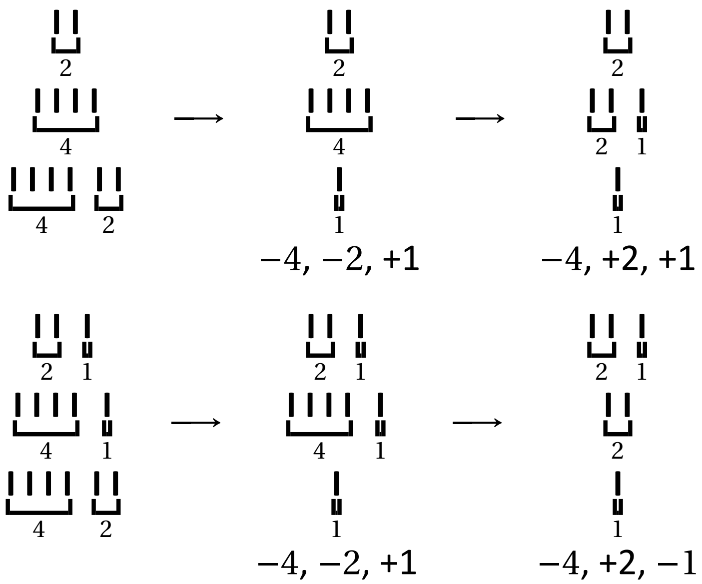


FIGURE 5 – Même bilan, mais réponse adaptée à la rangée où se trouve le paquet de 4

4. Conclusion

La stratégie gagnante pour le deuxième joueur repose sur la décomposition des rangées, et le maintien de la parité au travers de la partie. Si ces conditions sont remplies, et que le joueur ne fait pas d'erreur, la victoire lui est assurée.

Notes d'édition

(1) L'entier p n'est pas fixé indépendamment de n : il faut choisir le plus grand entier tel que $2^p \leqslant n$, de sorte que $2^p \leqslant n < 2^{p+1}$.

(2) Il aurait été intéressant de considérer en détail le cas où le joueur 1 prend 5, 6 ou 7 allumettes.

L'Association MATh.en.JEANS existe maintenant depuis 35 ans.

Grâce à elle, de nombreux jeunes continuent à découvrir le plaisir de la recherche mathématique et de tous les aspects de cette activité : travail en groupe, recherche personnelle, communication écrite et orale, rencontre de mathématiciennes et mathématiciens.

Elle a reçu en 2023 une reconnaissance officielle remarquable : la Médaille de la médiation scientifique du CNRS. Cette médaille récompense tous les acteurs et actrices de MATh.en.JEANS : élèves, enseignantes et enseignants, chercheuses et chercheurs.

Nous remercions pour leur soutien et leurs aides, à des degrés divers, dans l'organisation des congrès et la réalisation de cette brochure :

Le Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse et le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche.

Les fondations : Fondation Blaise Pascal, Fondation Mathématique Jacques Hadamard, Fondation TotalEnergies.

L'Institut Henri Poincaré, les Universités et Écoles, lieux d'accueil de nos congrès : Université d'Avignon, Université Libre de Bruxelles, Université de Bourgogne, Université de La Rochelle, Université de Lille, Université Claude Bernard Lyon 1, Université de Haute-Alsace, Université de Nantes, Université Côte d'Azur, Université d'Orléans, Université de Pau et des Pays de l'Adour, Université de Perpignan Via Domitia, Universität Potsdam, Université Paul Sabatier Toulouse III, Université Grenoble Alpes, École Centrale Supélec, École Normale Supérieure Paris-Saclay, Université Polytechnique Hauts-de-France.

Les laboratoires de recherche en mathématiques et informatique, les instituts, fédérations de recherche ainsi que les IREM et IREMS.

Les régions, départements, villes et communautés d'agglomérations, pour le soutien des ateliers MATh.en.JEANS sur tout le territoire.

Sans oublier les associations amies : Animath, Comité international des Jeux Mathématiques, APMEP, Maths pour tous, Science Ouverte, Les Maths en Scène…

L'activité MATh.en.JEANS permet aux jeunes collégien·nes, lycéen·nes, étudiant·es de vivre les mathématiques en découvrant la pratique de la recherche sous ses différents aspects avec l'aide de chercheuses, chercheurs et encadré·es par des enseignant·es. Lors du congrès annuel, les élèves présentent les résultats de leur recherche. Le travail de l'année est ensuite concrétisé par l'écriture d'articles comme ceux publiés ici.

Cette brochure regroupe des contributions des années 2022 et 2023.

Congrès Nice 2022

MATh.en.JEANS

ISBN 978-2-9569425-2-8