

Bookmakers

Des équipes numérotées 1 à n participent à un tournoi. Le déroulement est le suivant : au premier tour, deux équipes s'affrontent. L'équipe gagnante reste et l'équipe perdante est remplacée par la première équipe en attente dans l'ordre numérique (on pratique un ordre cyclique : n° n suit $n^{\circ}1$). On joue jusqu'à ce qu'une équipe batte toutes les autres *d'affilée*.

Dans le premier tournoi, les n équipes ont des niveaux très différents et l'une bat systématiquement les autres, une de ces autres bat les restantes, etc. Ainsi on sait d'avance qui va gagner, la seule inconnue dans cet ennuyeux tournoi est le nombre de tours que ça prendra.

1. Les numéros des équipes étant choisis au hasard, combien de tours va durer le tournoi, en moyenne ?
2. Sur quel nombre de tours faut-il parier ?

Dans le second tournoi, $n=3$, les équipes ont le même niveau et elles ont une probabilité égale de gagner chaque affrontement, indépendamment de ce qui s'est passé avant. Ça risque de durer longtemps.

3. Une fois les numéros attribués, les chances de victoires sont-elles équiprobables ?
4. Quelle va être la durée moyenne d'un tournoi ? La durée plus probable ?
5. Et si on retire la condition « d'affilée » ?
6. Et pour $n=4$?

Dans le 3e tournoi, il n'y a que trois équipes et 1 bat 2 avec proba $9/10$, 2 bat 3 avec proba $9/10$, 3 bat 1 avec proba $9/10$.

7. Calculer la durée moyenne, la durée la plus probable, la proba de gagner de chaque équipe une fois l'ordre initial tiré.