

Question 2.3. *Quels sont les mots infinis qui peuvent apparaître ?*

Quels sont les mots finis qui peuvent apparaître comme sous-mot ? Par exemple HVHV apparaît comme sous-mot, mais pas HHHHVVVV.

Est-ce que certains sous-mots déterminent complètement le mot infini ?

Question 2.4. *Parmi les mots de 10 lettres écrits avec les 3 lettres H, V, C, combien peuvent apparaître comme sous-mot d'un tel mot infini ? Est-ce une grosse proportion ?*

Même question avec les mots de N lettres, pour d'autres valeurs de N, pour N très grand...

Si on ne peut pas déterminer ce nombre exactement, peut-on minorer ou majorer ce nombre ? Dire qu'il y en a au moins 1000, ou au plus 10^{10} par exemple...

3 Auto-pavages

Definition 3.1. *On dit qu'une forme C est autopavable si, on peut paver C avec un certain nombre de copies de C à une échelle plus petite, toutes de même taille (les pavés sont tous isométriques à un même homothétique de C).*

Exemple: On peut paver un carré par 4 carrés de taille moitié. Un carré est donc autopavable. Ici, le rapport d'échelle est 1/2.

On peut aussi paver un carré par n^2 carrés de taille 1/n. Ici, le rapport d'échelle est 1/n.

Question 3.2. *Quelles sont les formes autopavables ? Y-en a-t-il d'autres que le carré ?*

Y a-t-il des formes qui sont auto-pavables de rapport n pour tous les entiers n, autres que le carré ?

Y a-t-il des formes qui sont auto-pavables pour une infinité de nombres autres que le carré ?

Definition 3.3. *Un nombre $\lambda < 1$ est un rapport d'autopavage s'il existe une forme C autopavable, de rapport λ .*

Exemple: A4 et A5.

Question 3.4. *On a vu que les nombres entiers et $\frac{1}{\sqrt{2}}$ sont des nombres d'autopavages. Y en a-t-il d'autres ?*

Est-ce que tous les nombres réels peuvent être des nombres d'autopavage ?

Est-ce que $\frac{1}{2,5}$ peut être un nombre d'autopavage ?

4 Construire une Gamme

Renouvelons la musique: inventons de nouvelles gammes.

Rappel: chaque note est caractérisée par un nombre réel positif: sa fréquence. Plus elle est élevée plus la note est aigüe.

L'écart de hauteur entre les notes correspond au rapport des fréquences. Par exemple: deux notes sont séparées par un octave si la fréquence de l'une est le double de l'autre: $f_2 = 2f_1$. Elles sont séparées par 3 octaves si $f_2 = 2 * 2 * 2f_1 = 8f_1$.

La gamme tempérée utilisée depuis Bach (?) divise l'octave en 12 intervalles égaux (les demi-tons): LA, LA#, SI, DO, DO#, RE, RE#, MI, FA, FA#, SOL, SOL#, LA. C'est à dire que chacune des 12 notes de la gamme est séparée de la suivante du même intervalle, la dernière note étant une répétition de la première un octave plus haut.

Je vous propose d'essayer de construire d'autres gammes tempérées.

Contraintes imposées:

Axiome de l'octave La note finale de la gamme doit être à l'octave de la note initiale (on autorise un nombre entier d'octaves: 1,2,3 voire plus)

Axiome de symétrie Comme la gamme tempérée: l'écart entre 2 notes consécutives doit être exactement le même. Ainsi, si vous commencez la gamme par n'importe laquelle des notes, vous entendez la même chose, juste décalé vers l'aigu ou vers le grave.

Pour choisir entre ces gammes, vous voudriez pouvoir jouer votre intervalle préféré exactement, ou sinon le plus près possible.

Par exemple, l'intervalle préféré de Pythagore était $3/2$ (la quinte pythagoricienne): comme c'est une fraction formée de petits entiers, deux sons vibrant à des fréquences f_1 et $f_2 = \frac{3}{2}f_1$ sonnent de manière harmonieuse aux oreilles de Pythagore. Dans la gamme tempérée, l'écart entre Do et SOL est proche de $\frac{3}{2}$, mais pas exactement.

Question 4.1. *Parmi les gammes à moins de 12 notes, quelle est la gamme qui a un intervalle le plus proche de $3/2$?*

Proposer une gamme ayant le moins de notes possibles, et qui a un intervalle plus proche de $3/2$ que la gamme tempérée.

Existe-t-il une gamme ayant un intervalle exactement égal à $3/2$?

On peut aussi se poser le même genre de question si votre intervalle préféré est la tierce harmonique $5/4$, ou bien $4/3$ (quarte), ou autre chose.

Pour se chauffer: quels sont les rapports de fréquences pour la gamme tempérée habituelle ?

Pour aller plus loin: écrire de la musique avec la gamme que vous aurez inventée !

Autre piste (plus physique/expérimental que math... nécessite du matériel ? voir avec les profs de musique ?): Avec un ordi (ou un synthé ?), créer un 1er son qui serait la superposition de 2 notes (sinusoidales) dont les fréquences sont de rapport $3/2$. faire la même chose avec l'intervalle DO-SOL de la gamme tempérée, et écouter la différence. Quelle différence entendez vous ? Tracer fonctions correspondant aux sons.

Faire la même chose avec des instruments, ou des courbes périodiques non sinusoidales (assembler des morceaux de droites ou de paraboles par exemple...)

Recommencer des sons qui ne sont pas sinusoidaux, mais superposition de plusieurs harmoniques, c'est à dire somme de plusieurs sinusoides (4 par exemple) de fréquences $f_1, 2f_1, 3f_1, 4f_1$ (en général de moins en moins fortes).

Expliquer théoriquement la présence ou non de "battements". (Difficile sans guide probablement ? L'exhiber sur la superposition de 2 sinusoides de fréquences très proches: graphe des fonctions, formules d'addition des cosinus...)