

Suites de nombres

Partant d'un nombre entier —par exemple 95—, on en multiplie les chiffres ce qui donne 45 ($=9 \times 5$) ; on recommence et cela donne 20 ($=4 \times 5$) ; on recommence et cela donne 0, qui lui-même redonne 0, et donc on s'arrête.

On note cela :

$$95 \rightarrow 45 \rightarrow 20 \rightarrow 0$$

On dit qu'il s'agit de la *suite multiplicative* partant de 95.

Sa *longueur* est 4. Elle *arrive sur* 0.

Le sujet consiste à étudier les suites *multiplicatives*.

Partie A

Question 1

Calculer toutes les suites multiplicatives qui partent de n pour $n=1, 2, \dots, 100$.

Question 2

Quelle est la plus longue suite multiplicative pour les entiers partant de n , pour $n=1, \dots, 100$?

Et pour $n=1, \dots, 1000$? $n=1, \dots, 10000$? etc. (utilisez un ordiacteur)

Existe-t-il une règle simple ?

Question 3

Se peut-il qu'une suite multiplicative soit infinie ?

Répondre en faisant un raisonnement.

Question 4

Certaines suites multiplicatives s'arrêtent sur 0 (c'est le cas de la suite multiplicative de 95). D'autres s'arrêtent sur 1 (c'est le cas de la suite multiplicative de 111).

Faire une liste de tous les cas possibles.

Quels sont les cas les plus fréquents pour $n=1, \dots, 100$?

Est-ce que ce qu'on trouve pour $n=1, \dots, 100$ se généralise ? (autrement dit est-ce qu'il y a d'autres cas que ceux trouvés pour $n=1, \dots, 100$)

Question 4

Quels sont les entiers n tels qu'il existe au moins une suite multiplicative de longueur n ?

Question 5

On note $prop(n)$ la proportion des suites multiplicatives partant de $n = 1, \dots, 10^m$ qui s'arrêtent sur 0.

Donner des conditions simples assurant qu'une suite multiplicative s'arrête sur 0.

Montrer que $prop(n)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Question 6

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

Partie B

La définition de *suite multiplicative* dépend de la base 10 utilisée usuellement pour écrire les nombres.

On reprend la même définition mais en considérant cette fois une base de numération quelconque b (b entier ≥ 2). On parle alors de *suite multiplicative en base b* .

Exemple de suite multiplicative en base $b=3$

$222 \rightarrow 22 \rightarrow 10 \rightarrow 0$ (car 8 en base 3 s'écrit 22, et que 4 s'écrit 10)

Reprendre l'étude précédente pour la base 10, en considérant cette fois :

- (1) la base 2
- (2) la base 3
- (3) une base quelconque.

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

Partie C

Au lieu de multiplier les chiffres, on les additionne et on parle donc de *suite additive*.

Exemple : $9123 \rightarrow 15 \rightarrow 6$

Etudier les suites additives (d'abord en base 10, puis en base quelconque).

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.