Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Écureuils et noisettes

Année 2025 – 2026

BORZYMOWSKI Louis, DELATTRE Axel, ROCHE Madisson,
SOUARE Amina, élèves de classe quatrième

DELANNOY Lila-Rose, LECLERCQ Clara, SCAILLEREZ Keyssie, élèves de classe seconde

Établissements : le Collège A. MALRAUX de LAMBRES-LEZ-DOUAI et le Lycée A. RIMBAUD de SIN-LE-NOBLE

Enseignant·es : BOCQUET Amélie, PICAVEZ Marion

Chercheur : François GOICHOT, Ceramaths - UPHF

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

A l'automne, une population d'écureuils fait le plein de noisettes pour passer l'hiver.
Chaque écureuil effectue sa récolte personnelle. Pour autant, afin que personne ne manque de rien, un système de partage particulier est mis en place.
Quand deux écureuils se rencontrent, ils comparent leurs récoltes. L'écureuil qui a le plus de noisettes donne autant de noisettes que l'autre écureuil en a.
Puis ils recommencent ce procédé jusqu'à ce que les deux écureuils aient le même nombre de noisettes.

1.2. Exemple :

L'écureuil A a 83 noisettes et l'écureuil B a 25 noisettes.   Comme 83 > 25
L'Ecureuil A va donner **25** noisettes à l'écureuil B. Il lui restera donc : 83 – **25** = 58 noisettes.

L'écureuil B va quant à lui recevoir les **25** noisettes de l'écureuil A donc 25 x 2 = 50 noisettes

On répète alors cette opération jusqu'à ce qu'il y ait une égalité.
Avec toujours le plus grand qui donne au plus petit.

1.3. Questions de recherche :

Y-a-t 'il des situations où le partage ne s'arrête jamais ?

Dans le cas où cela se termine combien d'étapes ont été nécessaires ?

Que se passe-t-il lorsque plus de 2 écureuils se rencontrent ?

2. Cas pour deux écureuils :

2.1. Premier constat :

<u>Exemples</u> :

	Au départ	Etape 1	Etape 2	Etape 3
Nombre de noisettes écureuil A	6	6-1 = 5	5-2 = 3	3+3=6
Nombre de noisettes écureuil B	1	1+1 = 2	2+2=4	4-3=1

On remarque qu'à l'étape 3 on revient à l'étape 1 le partage est donc infini.
De plus 6+1=7 et 7:2=3,5

On ne peut pas couper une noisette en deux. C'est impossible d'avoir une égalité.

Donc on ne peut pas obtenir de partage équitable si le somme des noisettes des deux écureuils est impaire. Dans ce cas le partage ne s'arrête jamais.

2.2. Nos programmes :

Pour pouvoir travailler avec des nombres plus grands, ou généraliser avec plus d'exemples, ou aller plus vite dans nos recherches, nous avons créé un programme en langage Scratch pour les collégiens et en langage Python pour les lycéens.

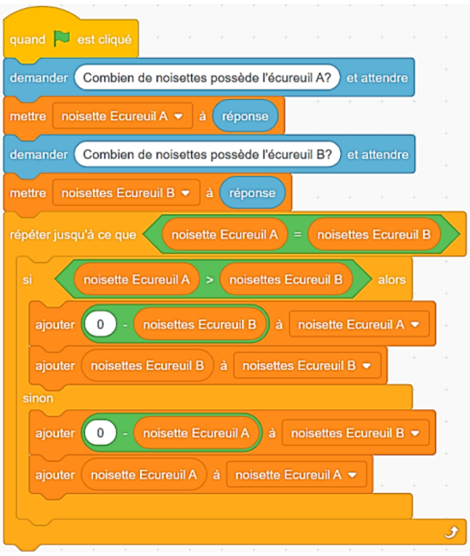

Figure 1 Programme Scratch pour deux écureuils

```python
def deux_ecu(n1,n2):
    nb_etape=0
    print("nombre total noisettes =",n1+n2)
    while (n1 != n2) and (nb_etape<20) :
        if n1>n2 :
            n1=n1-n2
            n2=n2*2
        elif n1<n2 :
            n2=n2-n1
            n1=n1*2
        nb_etape=nb_etape+1
        print("nombre noisettes e1=",n1,"nombre noisettes e2=",n2)
    print("nb_etape=",nb_etape)
```

Figure 2 Programme Python pour deux écureuils

2.3. Deuxième constat : un partage rapide et toujours équitable

Quand le nombre de noisettes d'un écureuil vaut trois fois celui de l'autre le partage équitable se fait en une étape.

	Au départ	pour tout entier n, $n < 3n$, on a alors	Etape 1
Nombre de noisettes écureuil A	n		$n + n = 2n$
Nombre de noisettes écureuil B	$3n$		$3n - n = 2n$

2.4. Troisième constat :

- A l'aide de nos programmes nous avons constaté que si la somme totale des noisettes des deux écureuils est paire on n'a pas forcément un partage équitable.

Exemples :

```
>>> deux_ecu(5,45)
nombre total noisettes = 50
nombre noisettes n1= 10 nombre noisettes n2= 40
nombre noisettes n1= 20 nombre noisettes n2= 30
nombre noisettes n1= 40 nombre noisettes n2= 10
nombre noisettes n1= 30 nombre noisettes n2= 20
nombre noisettes n1= 10 nombre noisettes n2= 40
```

```
>>> deux_ecu(7,3)
nombre total noisettes = 10
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 6
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 2
nombre noisettes n1= 6 nombre noisettes n2= 4
nombre noisettes n1= 2 nombre noisettes n2= 8
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 6
```

Figure 3 Cas infinis malgré un nombre total de noisettes pair

On remarque avec les nombres surlignés en jaune, qu'une boucle se crée. Les situations sont infinies, le partage équitable ne pourra pas avoir lieu.

- **On obtient un partage équitable si la somme des noisettes des deux écureuils peut s'écrire sous forme d'une puissance de 2.**

Rappel : Les puissances de 2 sont 2 ; 4 ; 8 ; 32 ; 64 ; 128 ; 256 ; 512 ; 1024 ; 2048 ; 4096 ; …

Voici tous les cas possibles si la somme totale des noisettes des deux écureuils vaut $8 = 2^3$:

```
>>> deux_ecu(1,7)
nombre total noisettes = 8
nombre noisettes n1= 2 nombre noisettes n2= 6
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 4
nb_etape= 2
```

```
>>> deux_ecu(2,6)
nombre total noisettes = 8
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 4
nb_etape= 1
```

```
>>> deux_ecu(3,5)
nombre total noisettes = 8
nombre noisettes n1= 6 nombre noisettes n2= 2
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 4
nb_etape= 2
```

Figure 4 Total noisettes = 2^3

Voici tous les cas possibles si la somme totale des noisettes des deux écureuils vaut $16 = 2^4$:

```
>>> deux_ecu(1,15)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 2 nombre noisettes n2= 14
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 12
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 3
>>> deux_ecu(2,14)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 12
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 2
>>> deux_ecu(3,13)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 6 nombre noisettes n2= 10
nombre noisettes n1= 12 nombre noisettes n2= 4
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 3
>>> deux_ecu(4,12)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 1
```

```
>>> deux_ecu(5,11)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 10 nombre noisettes n2= 6
nombre noisettes n1= 4 nombre noisettes n2= 12
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 3
>>> deux_ecu(6,10)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 12 nombre noisettes n2= 4
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 2
>>> deux_ecu(7,9)
nombre total noisettes = 16
nombre noisettes n1= 14 nombre noisettes n2= 2
nombre noisettes n1= 12 nombre noisettes n2= 4
nombre noisettes n1= 8 nombre noisettes n2= 8
nb_etape= 3
```

Figure 5 Total noisettes = 2^4

Nous n'avons pas réussi à prouver ce résultat, mais comme à chaque fois que les écureils se rencontrent, le nombre de noisettes d'un des deux écureuils est multiplié par deux ça nous semble cohérent.

- **On peut alors déterminer le nombre d'étapes maximal d'un partage** :

En effet si la somme totale des noisettes des deux écureuils est égale à 2^n alors on a remarqué qu'il y aura au maximum $n-1$ étapes.

On a réussi à le démontrer en prenant le cas où un des deux écureuils a au départ **1 seule noisette.**

	Au départ	Etape 1	Etape 2		Etape k
Nombre de noisettes écureuil A	$2^n - 1$	$2^n - 2$	$2^n - 4$	…	$2^n - 2^k$
Nombre de noisettes écureuil B	1	2	4		2^k

Lorsqu'on arrive à l'égalité on a alors $2^n - 2^k = 2^k$

soit $2^n = 2 * 2^k$

soit $2^n = 2^{k+1}$

Donc $n = k + 1$

Ainsi le nombre d'étape $k = n - 1$

A l'aide d'exemples, en listant tous les cas possibles pour une somme totale de 2^n noisettes, pour de nombreuses valeurs de n et en analysant toutes les étapes, on a également remarqué le fait suivant : le cas où un écureuil a au départ **1 noisette** se fait en un maximum d'étapes.

2.5. Quatrième constat

Si on a trouvé un cas qui fonctionne alors en multipliant le nombre de noisettes de départ des deux écureuils par un même nombre le partage sera aussi équitable.
Par exemple : on sait que si au départ un écureuil a 1 noisette et l'autre 7 noisettes le partage pourra se faire de manière équitable car $1 + 7 = 8 = 2^3$

Mais si on prend au départ 5 et 35 noisettes, on a $5 + 35 = 40$ mais ce n'est pas une puissance de deux pourtant, l'échange se finit par un partage équitable :

	Au départ	Etape 1	Etape 2
Nombre de noisettes écureuil A	5	10	20
Nombre de noisettes écureuil B	35	30	20

Le partage est équitable. Et on a $1 \times 5 = 5$ et $7 \times 5 = 35$.
Nous avons essayé avec des nombreux autres exemples et cela reste vrai.

3. Cas pour trois écureuils :

3.1. Rencontre aléatoire et programme :

Nous avons trouvé des cas qui fonctionnent à la main mais nous avons remarqué que le plus difficile est de considérer que les écureuils se rencontrent de manière aléatoire, car nous avons tendance à choisir.

	Au départ	Etape 1	Etape 2	Etape 3	Eta4e 3
Nombre de noisettes écureuil A	4	4	4+4=8	8-2=6	6-2=4
Nombre de noisettes écureuil B	7	7-1=6	6-4=2	2	2+2=4
Nombre de noisettes écureuil C	1	1+1=2	2	2+2=4	4

Nous avons donc écrit un programme pour simuler la rencontre aléatoire de trois écureuils :

```
def trois_ecu (n1,n2,n3):
    nb_etape=0
    L=[n1,n2,n3]
    print("nombre total noisettes =",n1+n2+n3)
    while (L[0] != L[1]) or (L[1]!= L[2]) and (nb_etape<50) :
        e=randint(1,3)
        if e==1 :
            Liste_echange = rencontre_ecu(L[1],L[2])
            L=[L[0],Liste_echange[0],Liste_echange[1]]
        if e==2 :
            Liste_echange = rencontre_ecu(L[0],L[2])
            L=[Liste_echange[0],L[1],Liste_echange[1]]
        if e==3 :
            Liste_echange = rencontre_ecu(L[0],L[1])
            L=[Liste_echange[0],Liste_echange[1],L[2]]
        nb_etape=nb_etape+1
        print(L)
    return (L, nb_etape)
```

```
def rencontre_ecu(na,nb):
    if na>nb :
            na=na-nb
            nb=nb*2
    elif na<nb :
            nb=nb-na
            na=na*2
    Liste_echange=[na,nb]
    return (Liste_echange)
```

Figure 6 Programme rencontres de 3 écureuils

On remarque en reprenant les mêmes nombres de noisettes des écureuils de l'exemple précèdent que nous ne pouvons plus prédire le nombre de rencontres car cela dépend des étapes intermédiaires qui sont aléatoires.

```
>>> trois_ecu(1,7,4)
nombre total noisettes = 12
[2, 7, 3]
[4, 5, 3]
[4, 2, 6]
[2, 4, 6]
[4, 4, 4]
([4, 4, 4], 'nbr étape =', 5)
```

```
>>> trois_ecu(1,7,4)
nombre total noisettes = 12
[2, 6, 4]
[4, 4, 4]
([4, 4, 4], 'nbr étape =', 2)
>>> trois_ecu(1,7,4)
nombre total noisettes = 12
[2, 7, 3]
[4, 7, 1]
[4, 6, 2]
[8, 2, 2]
[6, 4, 2]
[2, 8, 2]
[2, 8, 2]
[2, 6, 4]
[4, 4, 4]
([4, 4, 4], 'nbr étape =', 9)
```

```
>>> trois_ecu(1,7,4)
nombre total noisettes = 12
[1, 3, 8]
[2, 3, 7]
[4, 1, 7]
[3, 2, 7]
[1, 4, 7]
[2, 4, 6]
[2, 8, 2]
[2, 8, 2]
[2, 8, 2]
[4, 6, 2]
[2, 6, 4]
[4, 6, 2]
[8, 2, 2]
[8, 2, 2]
[6, 2, 4]
[4, 4, 4]
([4, 4, 4], 'nbr étape =', 16)
```

Figure 7 Nombre d'étapes intermédiaires très fluctuant

3.2. Constats :

- Premier constat : Comme il y a trois écureuils il faut que la somme totale des noisettes soit un multiple de 3, sinon un partage en trois équitable sera impossible.

- Deuxième constat : Grâce au programme, nous avons remarqué que si la somme totale des noisettes des trois écureuils est de la forme 3×2^n ça semble toujours fonctionner.

Exemples : Avec un nombre total de noisettes de :

$24 = 3 * 8 = 3 * 2^3$

```
>>> trois_ecu(3,5,16)
nombre total noisettes = 24
[6, 2, 16]
[4, 4, 16]
[4, 4, 16]
[4, 4, 16]
[8, 4, 12]
[16, 4, 4]
[16, 4, 4]
[12, 4, 8]
[4, 4, 16]
[4, 8, 12]
[8, 8, 8]
([8, 8, 8], 11)
```

$48 = 3 * 16 = 3 * 2^4$

```
>>> trois_ecu(5,3,40)
nombre total noisettes = 48
[5, 6, 37]
[5, 12, 31]
[10, 12, 26]
[10, 24, 14]
[20, 24, 4]
[40, 4, 4]
[36, 4, 8]
[32, 8, 8]
[24, 16, 8]
[16, 16, 16]
([16, 16, 16], 10)
```

$963 * 32 = 3 * 2^5$

```
>>> trois_ecu(2,8,86)
nombre total noisettes = 96
[4, 8, 84]
[8, 4, 84]
[4, 8, 84]
[4, 16, 76]
[4, 32, 60]
[4, 64, 28]
[4, 36, 56]
[8, 36, 52]
[16, 36, 44]
[16, 72, 8]
[32, 56, 8]
[32, 48, 16]
[16, 48, 32]
[32, 32, 32]
([32, 32, 32], 'nbr étape =', 14)
```

Figure 8 Exemples pour trois écureuils

4. Conclusion

Il y a des situations où le partage ne s'arrête jamais, comme quand la somme de noisettes des deux écureuils est impaire, ou n'est pas un multiple d'une puissance de 2.

Dans le cas où cela se termine, lorsque deux écureuils se rencontrent si la somme de noisettes des deux écureuils est égale à $m \times 2^n$, il semble qu'au maximum $n - 1$ étapes ont été nécessaires pour partager en deux les noisettes.

Lorsqu'il y a plus de deux écureuils au départ, on peut trouver des situations où le partage équitable sera possible. Mais il semble impossible de prévoir le nombre maximum de rencontres car les écureuils se rencontrent à chaque étape seulement à deux et ce de manière aléatoire.
Par exemple s'il y a trois écureuils, le partage en trois est possible si la somme totale de noisettes des écureuils est de 3×2^n noisettes.