

School: Colegiul Național Iași

Teacher: Marius Farcaș

Researcher: Marius Apetrii (Universitatea „Al. I. Cuza” Iași)

Iterations with tetrahedra

1. Mihai bought a 3D printer and with its help he wants to build a more special container. He starts with a piece in the shape of an equilateral triangle with side l and follows the steps:

E1. determines the means of the sides of the triangle

E2. determine the triangles according to Fig. 2

E3. for each of the three triangles colored red, remove the piece of material corresponding to it and replace it with the lateral surface corresponding to the regular tetrahedron that would have had the base of that triangle.

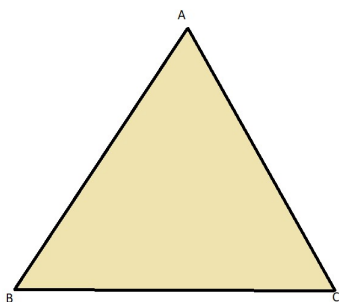


Fig. 1

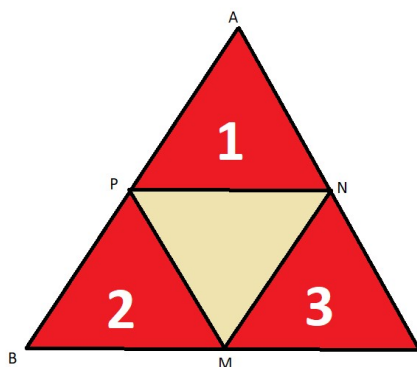


Fig. 2

He repeats the above steps for each of the newly appeared triangles. Step 1 is considered the initial triangle. A step is considered complete when all newly appeared triangles have been replaced. We note:

$V(n)$ – the number of vertices from step n

$M(n)$ – the number of edges from step n

$F(n)$ – the number of faces from step n

$S(n)$ – the area of the faces that make up the container at step n

For his container, Mihai will consider the initial triangle parallel to the horizontal plane and at each step, at step E3 he will position the tetrahedron so that his container can contain a maximum amount of liquid. We will denote by $Vol(n)$ the volume of liquid that can be retained by this container.

a) Determine $V(n)$, $M(n)$, $F(n)$, $S(n)$ and $Vol(n)$ for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ and then for some n .

b) What can be said about $S(n)$ and $V(n)$ if we consider an infinite number of steps?

2. Becoming more and more skilled in using the 3D printer, Mihai managed to build the container and starting with a certain triangle of sides a , b and c . In this case, at stage E3 he considers the tetrahedron that has the projection of the vertex in the incenter of the base, with the lateral area three times greater than the area of the base.

a) Are there restrictions on the values of a , b and c so that the container can be constructed?

b) Determine $V(n)$, $M(n)$, $F(n)$, $S(n)$ and $Vol(n)$ for $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ and then for some n , depending of a , b and c .

Iterații cu tetraedre

1. Mihai și-a achiziționat o imprimantă 3D și cu ajutorul acesteia dorește să construiască un recipient mai deosebit. El pornește cu o piesă de forma unui triunghi echilateral cu latura l și urmează etapele:

E1. determină mijloacele laturilor triunghiului

E2. determină triunghiurile conform Fig. 2

E3. pentru fiecare dintre cele trei triunghiuri colorate cu roșu, elimină bucata de material corespunzătoare acestuia și o înlocuiește cu suprafața laterală corespunzătoare tetraedrului regulat care ar fi avut baza triunghiul respectiv.

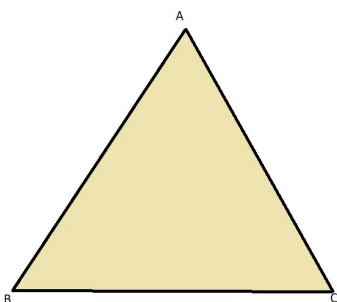


Fig. 1

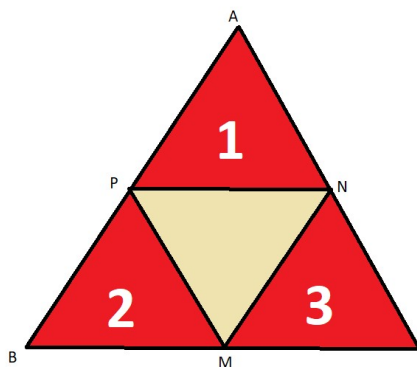


Fig. 2

El repetă pașii de mai sus pentru fiecare dintre triunghiurile nou apărute. Pasul 1 este considerat triunghiul inițial. Un pas se consideră finalizat când au fost înlocuite toate triunghiurile nou apărute. Notăm:

$V(n)$ – numărul de vârfuri de la pasul n

$M(n)$ – numărul de muchii de la pasul n

$F(n)$ – numărul de fețe de la pasul n

$S(n)$ – aria fețelor care compun recipientul la pasul n

Pentru recipientul său, Mihai va considera triunghiul inițial paralel cu planul orizontal și la fiecare pas, la etapa E3 va poziționa tetraedrul astfel încât recipientul său să poată conține o cantitate maximă de lichid. Vom nota cu $Vol(n)$ volumul de lichid care poate fi reținut de acest recipient.

- Să se determine $V(n)$, $M(n)$, $F(n)$, $S(n)$ și $Vol(n)$ pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ și apoi pentru un n oarecare.
- Ce se poate spune despre $S(n)$ și $V(n)$ dacă am considera un număr infinit de pași?

2. Devenind din ce în ce mai priceput în utilizarea imprimantei 3D, Mihai a reușit să construiască recipientul și pornind cu un triunghi oarecare de laturi a , b și c . În acest caz, la etapa E3 consideră tetraedrul care are proiecția vârfului în centrul cercului înscris în triunghiul bazei, cu aria laterală de trei ori mai mare decât aria bazei.

a) Există restricții asupra valorilor a , b și c astfel încât să poată fi construit recipientul?

b) Să se determine $V(n)$, $M(n)$, $F(n)$, $S(n)$ și $Vol(n)$ pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ și apoi pentru un n oarecare, în funcție de a , b și c .