

Sujet 8 : La cagette de pommes (C/L)

Un producteur positionne ses pommes dans des cagettes rectangulaires en suivant un quadrillage (voir la figure 1). Il est un peu maniaque, il faut en convenir. Il observe que, si deux pommes pourries sont adjacentes à une pomme saine, alors la pomme saine pourrit le lendemain (voir la figure 2). Ce producteur est curieux et voudrait savoir quand et comment une cagette peut être contaminée dans sa totalité. Un exemple est donné dans la figure 3. Chaque flèche représente un jour qui passe (et donc de nouvelles contaminations). Notez que cette configuration initiale ne permet pas de contaminer toutes les pommes.

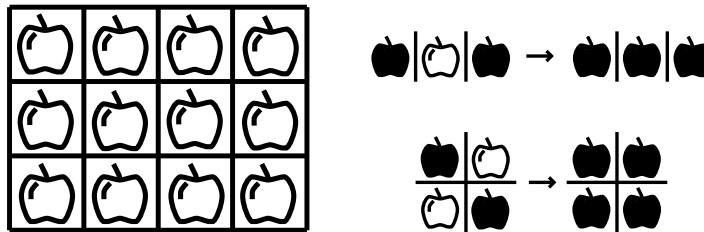


Figure 1. Cagette de pommes / Contamination

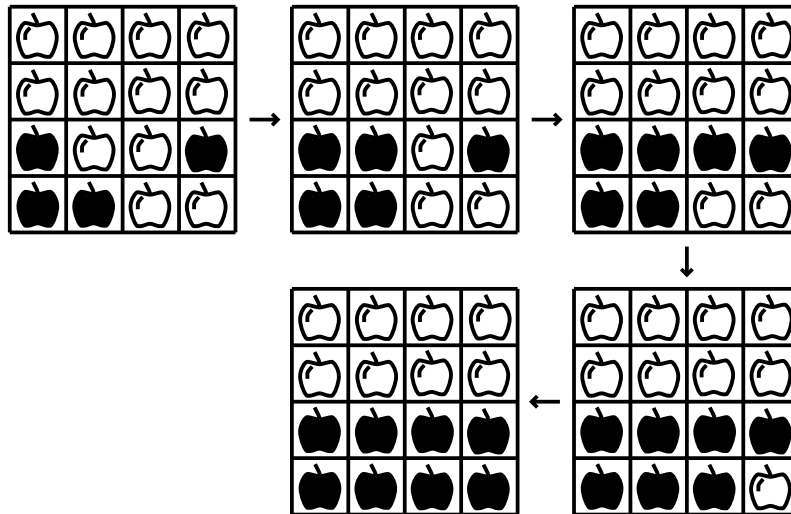


Figure 3. Un exemple

Question 1. Si l'on considère des cagettes carrées de taille 4×4 , quelle est le nombre minimal de pommes pourries nécessaires pour contaminer la cagette entière? Où doivent alors être placées ces pommes? Mêmes questions pour une cagette carrée de taille 5×5 .

Question 2. Mêmes questions mais d'abord pour des cagettes carrées de taille $n \times n$, puis pour des cagettes rectangulaires $n \times m$.

Question 3. Notre producteur veut mettre entre 40 et 60 pommes par cagette et cherche une forme optimale pour ses cagettes. C'est-à-dire, quelle doit être la forme de la cagette pour qu'il soit nécessaire d'avoir au moins 20 pommes pourries pour contaminer la cagette entière. Bon, 20, mais pourquoi pas 10, 15, 19, etc. Pouvez-vous trouver une formule?

Et après. Et pourquoi pas des cagettes dans lesquelles on dispose les pommes par couches, ce qui revient à étudier le même problème en dimension 3. Et la dimension 4 alors? Et les cagettes pacman, c'est quoi?