

Sujets MATH.en.JEANS 2022-2023

Ariane Martin

ARIANE.MARTIN@ENS-PARIS-SACLAY.FR

Lucas Gerretsen

LUCAS.GERRETSEN@HOTMAIL.FR

1 Un serpent dans la grille !

Sur une grille en 2 dimensions délimitée par un carré, Euler tente d'échapper à un étrange serpent. A chaque tour, la tête du serpent (en jaune) peut se déplacer de 1 case ; le corps du serpent (en rouge) occupe toutes les cases par lesquelles la tête est passée ; quant à Euler (en bleu), il peut se déplacer de 1, 2 ou 3 cases, sans passer par dessus le serpent. Dans ce jeu à 2 joueurs au tour par tour, le but du serpent est d'attraper Euler, et celui d'Euler est de survivre le plus longtemps possible. Quelles sont des bonnes stratégies à ce jeu ?

- Dans un premier temps, le corps du serpent grandit à chaque tour : le serpent occupe 1 case au 1er tour, puis 2 au 2e tour, etc ...
- Supposons maintenant que le serpent ne grandit qu'un tour sur 2 ...
- On peut bien sûr explorer différentes tailles de grilles, varier les positions initiales ou changer d'autres règles du jeu !

2 Jonglage

On s'intéresse à un système de notation des jonglages. Une suite u_n est un jonglage valide si :

- Si $u_n > 0$, une balle est lancée à l'instant n , et elle sera réceptionnée et relancée à l'instant $n + u_n$.
- Si $u_n = 0$, aucune balle n'est lancée à l'instant n .
- A chaque instant n , au plus 1 balle est lancée.

Exemples :

- La suite constante $\{2, 2, 2, \dots\}$ est un jonglage valide à 2 balles qui correspond à lancer 2 balles en alternance. Elle a une période de 1.
- Le jonglage $\{2, 1, 2, 1, \dots\}$ de période 2 n'est pas valide.
- Les jonglages $\{3, 3, 3, \dots\}$ et $\{4, 4, 1, 4, 4, 1, \dots\}$ de périodes respectives 1 et 3 sont 2 jonglages valides à 3 balles...

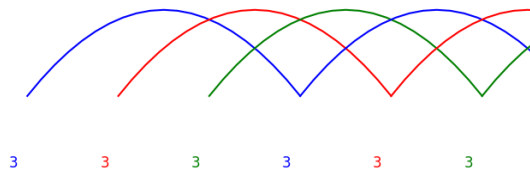


Figure 1: Le jonglage $\{3, 3, 3, \dots\}$ est un jonglage valide à 3 balles.

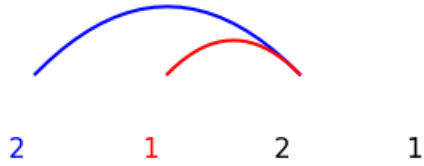


Figure 2: Le jonglage $\{2, 1, 2, 1, \dots\}$ n'est pas valide car 2 balles doivent être relancées au même instant !

Questions ouvertes :

- Comment déterminer si un jonglage est valide ou non ?
- Trouvez d'autres jonglages valides cycliques à 2 et 3 balles.
- Peut-on énumérer tous les jonglages à B balles de période K ?

3 Polygone circonscrit

Au sol, on trace un cercle, sur lequel on place aléatoirement N piquets. On fait ensuite le tour des piquets à l'aide d'une corde. En serrant bien, cela donne un polygone à n côtés. En moyenne, quelle est l'aire du polygone que l'on obtient ?

- Que se passe-t-il si on choisit n très grand ?
- Pour simplifier, on peut commencer en supposant $n = 3$.