

Sujets MATH.en.JEANS 2023-2024

Ariane Martin
ARIANE.MARTIN@ENS-PARIS-SACLAY.FR

Lucas Gerretsen
LUCAS.GERRETSEN@HOTMAIL.FR

1 Pistons multi-fonction

On dispose N pistons sur une grille infinie de dimension 1. Chaque cellule soit est vide, soit contient un piston orienté vers la droite. A chaque instant t , on peut choisir un piston à activer [1] :

- si un paquet de 1 à 12 pistons se trouve directement adjacent, alors ce paquet est poussé de 1 case ;
- si un paquet de 13 pistons ou plus se trouve directement adjacent, alors rien ne se passe. (figure 1)

On s'intéresse au cas où, à l'état initial, on dispose d'un paquet contigu de N pistons. Dans quel ordre doit-on activer les pistons pour que les pistons s'étendent le plus loin possible ? On cherche la séquence d'activation qui requiert le moins d'activations possibles.

Dans un second temps, les pistons ont une propriété supplémentaire, ils peuvent tirer un autre piston en se rétractant : s'il n'y a pas de piston adjacent, mais qu'un piston se trouve à 2 cases, ce dernier est ramené de 1 case (figure 2). En partant de l'état où les pistons sont étendus, on cherche maintenant à retourner à l'état initial, c'est-à-dire un unique paquet contigu de N pistons. Quelle est la séquence d'activations optimale ? Et si l'on peut activer plusieurs pistons simultanément ?

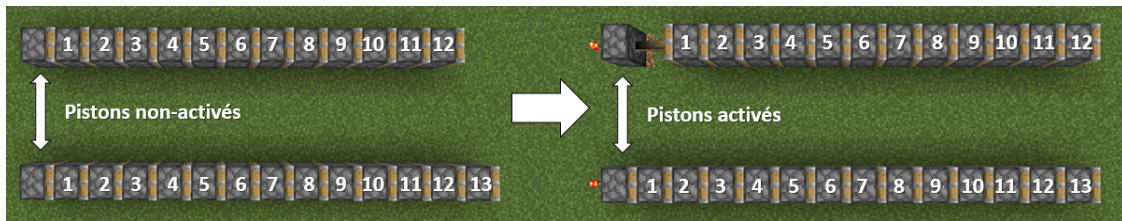


Figure 1: Un piston peut pousser jusqu'à 12 autres pistons



Figure 2: Un piston en tire un autre

2 Gardien de musée

Un musée cherche à se protéger des cambrioleurs potentiels avec un minimum de gardiens. Chaque gardien est immobile et peut voir tout ce qui se passe autour de lui tant qu'un mur n'obstrue pas son champ de vision.

- Combien de gardiens sont nécessaires dans une pièce carrée avec un énorme pilier carré au milieu (figure 3) ? Comment les positionner ?
- Comment faire avec une pièce en forme de "O" ?

- Qu'en est-il d'une pièce polygonale avec de nombreux recoins ? Peut-on trouver une méthode pour positionner un nombre optimal de gardiens ?
- Supposons que suite à une épidémie, un seul gardien soit disponible dans le musée et qu'il puisse se déplacer pour l'occasion. Quel trajet doit-il effectuer pour surveiller correctement le musée ? On peut imaginer que son objectif soit de minimiser la distance parcourue à chaque ronde ou encore de minimiser le temps où des recoins du musée restent sans surveillance.
- On peut également rajouter d'autres contraintes aux gardiens par exemple, si les gardiens avaient un champ de vision limité, s'ils cherchaient à se surveiller mutuellement,...

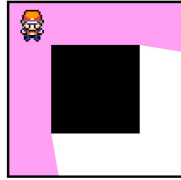


Figure 3: Un gardien et son champ de vision

3 Reflets dans l'eau

Un développeur de jeu vidéo cherche à simuler les reflets du soleil dans l'eau, pouvez-vous l'aider à faire le reflet le plus convaincant possible ? On peut modéliser dans un premier temps le soleil par un objet lointain qui émet des rayons parallèles, la surface de l'eau par un miroir plan quadrillé, et un observateur par un point.

- Supposons que le quadrillage a pour dimension 1×1 . A quelles conditions l'observateur aperçoit-il le reflet ?
- Et si le quadrillage a pour dimension 1×3 (figure 4) ?
- En réalité, la réflexion à la surface de l'eau ne se comporte pas comme un miroir plan parfait, et l'observateur peut toujours partiellement voir le reflet même s'il ne respecte pas exactement les conditions trouvées précédemment. Question ouverte: comment pourrait-on modéliser cela ?
- On peut ensuite modéliser une grille de dimension 5×5 , ou imaginer que la surface de l'eau prend la forme d'une vague...
- Que se passe-t-il pour d'autres formes/objets ?

Ce sujet est l'occasion de générer des images (artistiques ?) ; du code sera donc fourni si besoin, par exemple python... Pensez à conserver les différentes images générées.

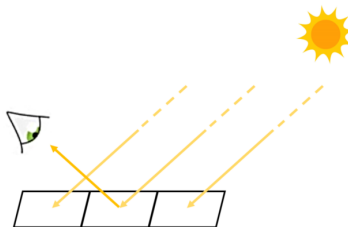
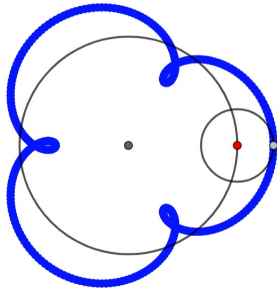


Figure 4: reflet du soleil sur une grille 1×3

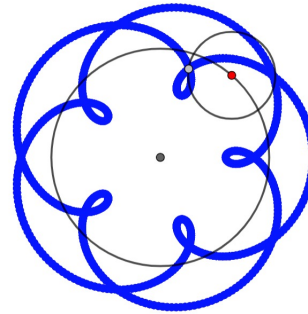
4 Dessins avec des cercles

Prenons un cercle de rayon r_1 sur lequel on place un point rouge, en faisant tourner ce cercle à une vitesse ω_1 et en observant le mouvement de ce point, nous retrouvons notre cercle. Si nous rajoutons un deuxième cercle de rayon r_2 et de vitesse $\omega_2 = \frac{r_1\omega_1}{r_2}$, tel que le point rouge soit son centre, et que nous observons un point de ce deuxième cercle, une nouvelle figure va se former (figure 5).

- Comment réaliser des fleurs à 2, 3, 4 pétales ?
- Comment tracer des fleurs avec plusieurs rangées de pétales ?
- Que ce passe-t-il si on rajoute un 3^e cercle ?
- Peut-on utiliser cette méthode pour tracer un dessin en particulier (par exemple un éléphant) avec 3, 4, n cercles ?



(a) Fleur à 3 pétales



(b) Fleur avec deux rangées de 5 pétales

Figure 5: Exemples de dessins avec 2 cercles

References

- [1] Notch and al. Minecraft. version 1.7 et plus, 2011.