Projets MATh.en.JEANS

Année 2023-2024

Arnaud Rousselle et Thibaut Duboux

Sujet 1. À la poursuite du vif d'or

Lors du premier match de Quidditch de la saison, Harry doit attraper le vif d'or pour remporter le match. Les deux ont la même vitesse maximale lors de leur poursuite dans un stade circulaire et fermé. Pour commencer, Harry se trouve au milieu de l'arène et doit repérer le vif d'or. Il l'aperçoit en train de tourner en continu au bord du stade.

Challenge 1. Harry peut-il attraper le vif d'or avant la fin du match ?

Pour empêcher la victoire d'Harry au second match, Severus lance un sort au vif d'or. Ce dernier se déplace alors en effectuant une succession de segments.

Challenge 2. Harry peut-il attraper le vif d'or sous le mauvais sort avant la fin du match ?

Sujet 2. La quête de l'aire optimale

On s'intéresse à coupler un carré et un triangle de la meilleure des manières possible : pour cela il faut résoudre ces deux challenges.

Challenge 1. Quelle est l'aire maximale d'un triangle contenu dans un carré de côté 1 ?

Challenge 2. Quelle est l'aire minimale d'un triangle contenant un carré de côté 1 ?

Sujet 3. Rallye raid et pénurie d'essence

Sébastien a prévu de rouler lors d'un rallye dont le circuit passe par les villes $T_1, ..., T_n$. On peut commencer par la ville de son choix puis on doit parcourir le circuit en entier dans un ordre cyclique (c'est-à-dire qu'après la ville T_n il y a T_1).

Sébastien commence le rallye par la ville de son choix avec une voiture au réservoir vide. A chaque ville T_i, il peut prendre une quantité p_i d'essence.

L'information supplémentaire qu'il a sur la course, est que $p_1 + ... + p_n$ est une quantité d'essence suffisante pour conduire sur l'entièreté du rallye.

Challenge 1. Y a-t-il une ville départ qui lui permettrait de faire le rallye sans panne d'essence ?

Au dernier moment Sébastien reçoit de nouvelles informations (remplaçant l'ancienne) sur l'essence pour le rallye :

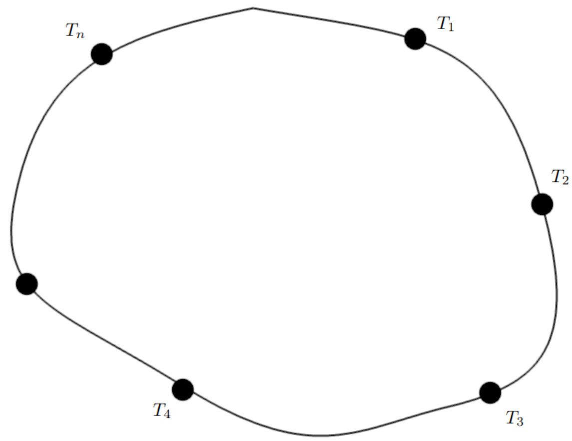

Figure 1. Circuit du rallye

- chaque section du circuit, par exemple entre T_i et T_{i+1}, nécéssite une quantité entière r_i d'essence ;
- chaque p_i est une quantité entière d'essence ;
- $(p_1 + ... + p_n)$ est une unité d'essence de plus que la quantité nécessaire pour faire le circuit en entier.

Challenge 2. Combien de villes départ peut-il choisir pour faire le circuit en entier en ayant au moins une unité d'essence dans son réservoir tout au long de la course ?

Sujet 4. Duel au sommet

Billie, une tenniswoman, affronte Bobby, un tennisman, lors d'un match en un seul et unique set diffusé à la télévision. La télévision propose dans un premier temps à Billie de servir en première et que le premier à atteindre 4 jeux gagnants remporte la victoire. L'arbitre du match propose deux schémas de service possible :

- le service alterné : à chaque jeu le serveur change ;
- le service gagnant : le gagnant du jeu prend le service.

Billie estime qu'elle a 71% de chances de gagner le service, tandis que Bobby a 67% de chances de le gagner.

Challenge 1. Pour chacun des deux schémas, quelle est la probabilité que Billie gagne ?

Pour rentabiliser la diffusion, la chaîne décide de changer le nombre de jeux nécéssaire pour gagner l'unique set. Cependant, elle laisse le choix à Billie de décider du schéma de service pour le match. On notera n le nombre de jeux inconnus pour gagner.

Challenge 2. Quel schéma de service est le plus avantageux pour la victoire de Billie ?

Sujet 5. De la place autour de la table ?

On cherche, étant assis autour d'une table, à savoir s'il est possible d'intercaler une nouvelle personne. Pour cela, travaillons autour de trois situations en modélisant la table et les personnes par différentes formes géométriques.

Challenge 1. La Figure 2 montre six cercles de rayon 1 qui ne se chevauchent pas, touchant un carré de côté 2. Peut-on ajouter un septième cercle ?

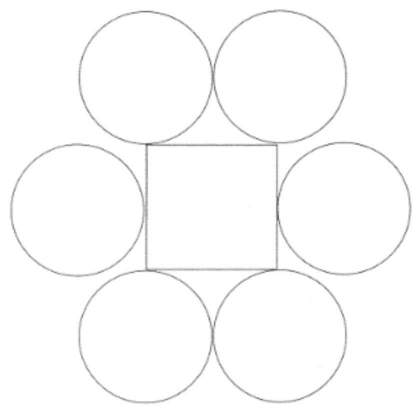

Figure 2. Six cercles touchant un carré

Challenge 2. La Figure 3 montre huit carrés similaires touchant un autre carré. Peut-on ajouter un neuvième carré ?

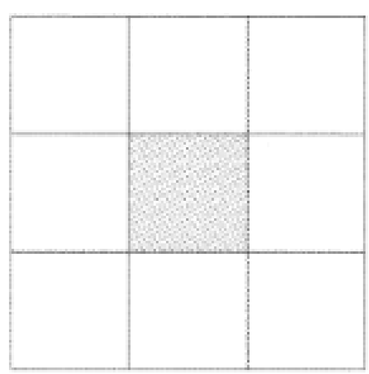

Figure 3. Un carré touchant huit autres

Challenge 3. La Figure 4 montre douze triangles similaires touchant un autre. Peut-on ajouter un treizième triangle ?

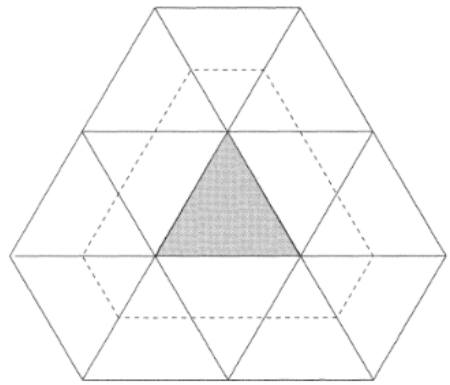

Figure 4. Un triangle touchant douze autres

Sujet 6. Les clubs du village

Tout juste élu maire dans la ville d'Impère, Guillaume doit compter le nombre maximum de clubs qu'il va pouvoir financer dans sa ville. Cependant, la composition des clubs suit une règle historique un peu spéciale. Tous les clubs ont un nombre impair de membres. Étrangement, dès que l'on prend deux clubs, on s'aperçoit qu'ils ont un nombre pair de membres en commun.

Challenge 1. Combien y a-t-il de clubs au maximum à Impère ?

Sa collègue Françoise, maire d'Égal, la ville voisine, doit se poser la même question. Elle n'a pas à réfléchir en prenant en compte cette règle. Par contre, elle veut qu'il y ait autant de femmes que d'hommes dans chacun des clubs. On notera n le nombre de femmes et n le nombre d'hommes. Au moment du comptage, elle remarque que tous les clubs n'ont pas exactement les mêmes membres. Étonnamment, pour deux clubs quelconques, il y a exactement autant de femmes que d'hommes qui appartiennent à chacun des deux clubs.

Challenge 2. Combien y a-t-il de clubs au maximum à Égal ?
