Sujet 4 : Pile ou Face

Pile et face en solitaire (posé par Marc Aiguier mais repris d'un problème proposé par Éric Sopena)

On considère une rangée de k pièces, qui peuvent être du côté pile ou côté face. Voici par exemple une rangée de 5 pièces :

$$P\ F\ F\ F\ P$$

À chaque coup, on doit retirer une pièce F et retourner les pièces voisines (s'il y en a). On cherche naturellement à retirer toutes les pièces de la rangée. Voici une séquence de coups qui permet de supprimer toutes les pièces de la rangée précédente (la pièce retirée est soulignée) :

$$P\ \underline{F}\ F\ F\ P \to \underline{F}\ _\ P\ F\ P \to _\ _\ P\ \underline{F}\ P \to _\ _\ \underline{F}\ _\ F \to _\ _\ _\ _\ \underline{F} \to _\ _\ _\ _\ _$$

La question naturelle est alors la suivante :

- Peut-on caractériser les rangées gagnantes (c'est-à-dire celles que l'on peut vider) ?

On remarque dans la séquence précédente que les pièces peuvent avoir 0, 1 ou 2 pièces voisines.
On pourra également s'intéresser à une variante de la règle précédente, qui consiste à resserrer les pièces dès qu'un trou est créé. De cette façon, les pièces aux extrémités n'ont qu'une seule voisine alors que toutes les autres en ont deux. Dans le cas de cette variante, la séquence précédente devient :

$$P\ \underline{F}\ F\ F\ P \to \underline{F}\ P\ F\ P \to F\ \underline{F}\ P \to P\ \underline{F} \to \underline{F} \to$$

et la rangée est à nouveau gagnante ! mais en est-il toujours ainsi ? ....