

# Sujet 1 - Suites de nombres

Partant d'un nombre entier, par exemple 95, on en multiplie les chiffres ce qui donne  $45 (= 9 \times 5)$  ; on recommence et cela donne  $20 (= 4 \times 5)$  ; on recommence et cela donne 0, qui lui-même redonne 0, et donc on s'arrête.

On note cela :  $95 \rightarrow 45 \rightarrow 20 \rightarrow 0$ .

On dit qu'il s'agit de la *suite multiplicative* partant de 95. Sa *longueur* est 4. Elle *arrive sur* 0.

Le sujet consiste à étudier les suites *multiplicatives*.

## Partie A :

### Question 1 :

Calculer toutes les suites multiplicatives qui partent de  $n$  pour  $n=1, 2, \dots, 100$ .

### Question 2 :

Quelle est la plus longue suite multiplicative pour les entiers partant de  $n$ , pour  $n=1, 2, \dots, 100$  ?

Et pour  $n=1, 2, \dots, 1000$  ?  $n=1, 2, \dots, 10\,000$  ? etc. (utilisez un ordinateur)

Existe-t-il une règle simple ?

### Question 3 :

Se peut-il qu'une suite multiplicative soit infinie ? Répondre en faisant un raisonnement.

### Question 4 :

Certaines suites multiplicatives s'arrêtent sur 0 (c'est le cas de la suite multiplicative de 95). D'autres s'arrêtent sur 1 (c'est le cas de la suite multiplicative de 111).

Faire une liste de tous les cas possibles.

Quels sont les cas les plus fréquents pour  $n=1, 2, \dots, 100$  ?

Est-ce que ce qu'on trouve pour  $n=1, 2, \dots, 100$  se généralise ? (autrement dit est-ce qu'il y a d'autres cas que ceux trouvés pour  $n=1, 2, \dots, 100$ ).

### Question 5 :

Quels sont les entiers  $n$  tels qu'il existe au moins une suite multiplicative de longueur  $n$  ?

### Question 6 :

On note  $prop(n)$  la proportion des suites multiplicatives partant de  $n=1, \dots, 10^m$  qui s'arrêtent sur 0.

Donner des conditions simples assurant qu'une suite multiplicative s'arrête sur 0.

Montrer que  $prop(n)$  tend vers 0 quand  $n$  tend vers l'infini.

### Question 7 :

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

## **Partie B :**

La définition de *suite multiplicative* dépend de la base 10 utilisée usuellement pour écrire les nombres.

On reprend la même définition mais en considérant cette fois une base de numération quelconque  $b$  ( $b$  entier,  $b \geq 2$ ). On parle alors de *suite multiplicative en base  $b$* .

Exemple de suite multiplicative en base  $b=3$  :  $222 \rightarrow 22 \rightarrow 10 \rightarrow 0$  (car 8 en base 3 s'écrit 22, et que 4 s'écrit 10)

Reprendre l'étude précédente pour la base 10, en considérant cette fois :

- 1) la base 2 ;
- 2) la base 3 ;
- 3) une base quelconque.

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.

## **Partie C**

Au lieu de multiplier les chiffres, on les additionne et on parle donc de *suite additive*.

Exemple :  $9123 \rightarrow 15 \rightarrow 6$

Etudier les suites additives (d'abord en base 10, puis en base quelconque).

Trouver le plus de choses intéressantes possibles à dire sur le sujet.